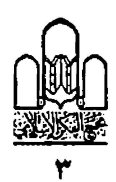


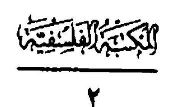


منطق الاستقراء

الكتاب الأول





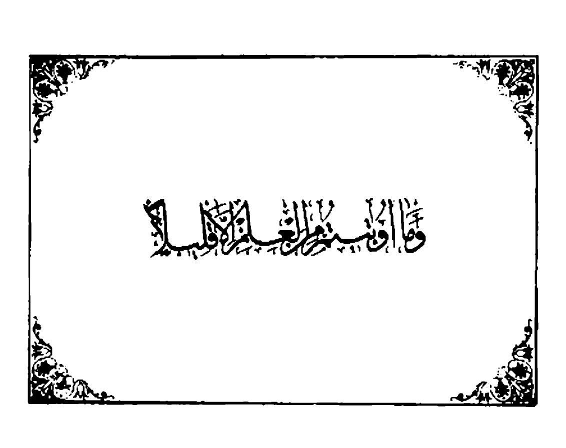




الكتاب الأول

السيد عمار أبو رغيف

الكتاب:	منطق الاستقراء
المؤلف:	السيد عمار ابو رغيف
نشر:	مجمع الفكر الاسلامي
الطبعة:	الاولى ـ شوال ١٤١٠ هـ.ق
المطبعة:	مهر ـ قم
الكمية:	١٥٠٠ نسخة
السعر:	٢٠٠٠ ريال


وما أوتيتم من العلم إلا قليلا



المدخـل:



منذ زمن ليس باليسير عزمت على ابتكار الحيلة، ومغالبة خيبة الامل في ظل الـظروف القـاسية، عسىٰ ان اتفـرغ لدراسة احد فروع المعرفة البشرية الخطيرة، اعني: «الاستقراء والاحتمال»، بادئاً من حيث تركة الفيلسوف الفقيد معلم جيلنا السيد محمد باقر الصدر.

يدفعني لخوض هذا الغمار المهيب شوق وتطلع لبناء هرم افكاري، وسد بعض ثغرات اجتهاد الرأي، حيث كنت ولا ازال طامحاً لتكوين قناعة تصديقية بما احتمله، وما اتيقن به، ومن ثمّ بناء الفكر على تصديق استطيع الدفاع عنه بثقة.

ثم ابتدأت ! وفي الخطوات الاولى لهذه البداية حاولت ان اطلع على الجاد مما قيل حول كتاب «الاسس المنطقية للاستقراء»، محور درسنا، ومنطلق بدايتنا. فوجـدتُ الميدان جدبـا الاّ من غرسـين، أحدهما شرح تعليمي، لم يكتمل بعد، مضبوط على أشرطة التسجيل، قام به أحد الأعلام، والآخر عرض نقدي باللغة الفارسية، حرره الدكتور عبد الكريم سروش.

وكان لا بد لنا من استبصار كلا الاثرين، وجني ما يمكن من ثمار الغرسين، فاستمعت لبعض اشرطة التسجيل بعناية، وقرأت بامعان دراسة الدكتور «سروش». ولاحظت ان العثرات التي يمنى بها دارسو كتاب «الاسس المنطقية للاستقراء» تعود في الدرجة الاولى الى قصور في الفهم، أي ان الاعتراضات التصديقية، التي تسجل غالباً، ترجع أساساً الى فقدان التصور السليم بشأن اطروحة «الاسس». وفي هذا المناخ ارتسم لي دور واضح في الافق، وحُمّلت مهمة أساس في المرحلة الاولى، ذلك ان أبدأ في بسط ما يلفه الغموض من اطروحة الاستاذ، وتعميم امكانية الافادة من هذا الأثر الحيوي.

ثم لقيت اصراراً، من قبل بعض الأصدقاء، على ايضاح الموقف من ملاحظات سروش النقدية، فقدمت هذا المهم، وصدر كتاب « الاسس المنطقية للاستقراء في ضوء دراسة الدكتور سروش»، وما زادني معالجة دراسة سروش الاّ اصراراً على ضرورة اعادة تظهير كتاب «الاسس»، وكسر الطوق، الذي يحلو للبعض ان يقيدوا به هذا الكتاب، ذلك ان تعميم الثقافة، التي يبشر بها هذا الكتاب اصبح واجباً فكرياً أكيداً.

أجل ! ان المشتغلين في حقل المنطق والفلسفة يدركون جيداً أهمية دراسة الاستقراء، والآثار الخطيرة، التي تترتب على الموقف من مشكلات هذا الموضوع سواءعلى مستوى المعرفة البشرية بعامة.أم على مستوى البحث العقائدي بصورة خاصة.

كما اضحى واضحاً للمشتغلين في علوم الشريعة مدى اهمية دراسة الاستقراء ونظرية الاحتمال في مجال اشتغالهم، اذ أدخل الفقيه المجدد الراحل «السيد محمد باقر الصدر» نظرية الاحتمال وتفسير الدليل الاستقرائي على أساس تلك النظرية من باب واسع على علوم الشريعة ـ سواء منهج البحث «علم الاصول»، أم البحث الفقهي، أم علم الحديث والرجال ـ واضحت مواقع أهم

كبريات البحث الاصولي ترتهن أساساً بالموقف المختار في نظرية الاحتمال.

وليس أمام الفقيه ـ المجتهد بحق ـ أيّ حق في اهمال ما طرحه الصدر، حيث اما ان يجتهد في اتخاذ موقف محدد مما طرحه الصدر، فيحصل على كبريات البحث الاصـولي على أساس اجتهاد وبصيرة، واما ان يقلد ويتبنى رأياً لأحد الباحثين دون معاناة وتحقيق، وهذا يعني أنه سوف ينتهي الى كبريات البحث الاصولي على أساس تقليد في الرأي، وهم يقولون: النتيجة تتبع أخس المقدمات!

أمـا رجـال البحث الفلسفي والمنـطقي ـ وأخص منهم المهتمين بمناهج البحث في العلوم ـ فليس امامهم أي مندوحة في اهمال نظرية «الاسس المنطقية للاستقـراء». لعلنـا نجـد تبريراً لفـرسان ميدان مناهج البحث في الغرب لعدم اطلاعهم على محاولة الصدر، حينما نتوسل بأمرين:

الأول ـ لا يزال كتاب «الاسس» غير مترجم بشكل فني ولائق الى احدى اللغات الاساسية في غرب القارة كالانجليزية او الفرنسية.

الثاني ـ ان الغربيين يعانون من تضخم هذا البحث، فقد قالوا وكتبوا ـ عبر اربعة قرون ـ كثيراً جداً حول هذا الموضوع، وتناوب مئات العباقرة وأُولي النبوغ على معالجة مشكلاته، حتى كاد الغرب لا يصدق بولادة جديدة ـ بمعنى الكلمة ـ على ارضه، فضلاً عن جدة معالجةٍ على ارض الشرق وبلغة العرب!

لكن كلا هذين الأمـرين لا يبرران لرجال مناهج البحث في الشرق ـ والمسلمين منهم على الخصوص ـ عدم الاهتمام الاكيد باطروحة «الاسس المنطقية للاستقراء»، لأن هذه الاطروحة ـ دون مبالغة في القول ـ نقلتنا مع بعض وجوه مشكلات الاستقراء، ونظرية الاحتمال ما يقرب من ثلاثة قرون، واختزلت المسافات الزمنية، التي تفصلنا عما عليه الوضع في غرب القارة في وجوه اخرى اكثر من قرن.

ومن ثم طرحت معالجة هي أقرب لروحنا في الشرق، وعساها ان تكون علاجاً أو على الأقل بداية العلاج لسدّ الهوة الثقافية العميقة ، التي تفصل بين

العالمين. لا اريد ان أُطيل في معالجة هذا الموضوع عبر هذا المدخل، حيث يستحق البحث دراسة مستأنفة ، انما اريد ان استثمر ما تبقى من مجال في مدخلنا هذا لأضع القارئ الكريم في الصورة العامة لما أنا صانعه في هذه الدراسة:

ابتدئ هذه الدراسة بفصل أتناول فيه قضية الاستقراء ومعالجة مشكلاته في تاريخ الفكر الفلسفي، فأبدأ بارسطو حتى انتهي الى الوضع الراهن لهذه القضية والاطار الذي تعالج خلاله مشكلات الاستقراء في منظور معاصر. وسأعنى في الدرجة الاولى بضغط وتلخيص مادة هذا الفصل، ولعلها تكون أقرب الى النظرة التاريخية منها الى الدراسة التحليلية.

اتبع ذلك بالفصل الثاني، حيث اتناول فيه دراسة نظرية الاحتمال، وساعتمد في هذا الفصل ـ ما استطعت لغة تعليمية خالصة. فاعرض لقضايا نظرية الاحتمال الاساسية بشكل مبسط، وعبر أمثلة توضيحية أُحاول ان أُجلّي المسائل الاولية في حساب الاحتمال، مضيفاً اليها مبدأ الاحتمال العكسي. وسوف أُؤكد هناك على ايضاح مصدر المقام في معادلة العكسي. وسأعرض ايضاً بشكل توضيحي لتفسير الاحتمال لدى الاستاذ. وسأطلق على التفسير الذي اختاره والنظرية التي اعتمدها مصطلح «التفسير الاجمالي للاحتمال»، وسوف يعيننا الاقتراب من هذا التفسير على فهم واستيعاب القضايا الرياضية في حساب الاحتمال.

وسيكون الفصل الثالث مختصاً بدراسة «نظرية الاحتمال»، أيضاً. فبعد تأهيل القارئ في الفصل السابق، من خلال هضم المسائل الاساسية في حساب الاحتمال، نكون قادرين على عرض نظرية الاحتمال بمبادئها النظرية، وقواعدها وقوالبها المدرسية، كما نستطيع ان نعرض لأعقد مسائل حساب الاحتمال، التي اجّلنا دراستها للفصل الثالث. واعني على الخصوص معادلات برنولي ونظريته.

ولعلي أكون قد وفقت في هذا الفصل، وفي قضايا «برنولي» لتحقيق بعض

الانجاز بل هناك مجموعة امور تحققت في هذا الموضوع، الى جانب ايضاح وبسط ما غمض واختزل في كتاب «الاسس» . فقد اوضحت فكرة التوزيع لدى برنولي، وحددت بوضوح القاعدة التي تستنبط مباشرة من معادلاته، ضمن استخدام صيغة رياضية ادق لتشخيص «الحد» في توزيع «برنولي»، وقد ميّزت بين هذه القاعدة، وبين النظرية العامة، التي يقررها «برنولي». وعكفت بعد ذلك على اثبات نظرية «برنولي»، من خلال برهان «تشيبيف».

لعل القارئ يتساءل عن فائدة ودور تفصيل هذا البرهان في قضايا الاحتمال ونظريته الرئيسية؟!

استهدفت من عرض برهان «تشيبيف» أمرين:

الاول: اشباع رغبة القارئ، الذي اعتاد قبول الافكار بأدلتها.

الثاني: ان أرفع ابهاماً وقع فيه البعض، حيث يعتقد ان نظرية برنولي، التي ذكرها الاستاذ في نهاية عرضه امر لم يقله «برنولي»، او لم يرده! ونحن من خلال نقل نص النظرية ـ التي اعتمدنا على ترجمته العربية من الروسية، ومقارنته بالنص الانجليزي، والنصوص العربية التي نقلت النص الانجليزي ـ مضافاً الى ذكر اثبات «تشيبيف» نستطيع رفع هذا الابهام نهائياً ان شاء الله تعالى. آملين من الاخوة الذين يهتمون بدراسة وتدريس «الاسس» الاطلاع ـ ضمن الحد الادنى ـ على النظريات المعاصرة التي عرض اليها الكتاب.

كما استطاع بحثنا ان يدافع عن نظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي، ضمن معالجة مشكلة تفسير «برنولي» حيث اثبتنا ـ بعد عدم الاقتناع بالتفسير المطروح في «الاسس» ـ انسجام نظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي مع نظرية برنولي وتوزيع برنولي. وفي الفقرة الاخيرة من هذا الفصل حاولت أن أُقدم تعريف الاستاذ للاحتمال، مشتقاً اياه من خلال مجموع كلماته، واحسب انه جاء في صيغة منظمة، كما حاولت أن ارسم الهيكل العام لنظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي.

وجاء الفصل الرابع لنختبر فيه قدرة نظرية الاحتمال الاجمالي على معالجة مشكلة الاستقراء، وبيان الاسلوب الذي اختاره الاستاذ لتنمية احتمال التعميم الاستقرائي، على أساس نظريته في الاحتمال. فابتدأته بالتركيز على احدى القضايا الاساسية في تفسير الدليل الاستقرائي، كمحور يميز اتجاهي التفسير الرئيسين في عالم الغرب، ثم عقدت فقرتين، تناولت في الفقرة الاولى دراسة موقف التجريبية الخالصة من الاحتمال اتكاء على المدرسة الكلاسيكية «الرياضية»، فعرضت لـ«لابلاس»، وتفسير الدليل الاستقرائي لديه. ثم عقدت فقرة مستقلة لعرض انجازات وطريقة الاستاذ في دراسة هذا الموضوع.

واستطيع أن أضع اليد على بعض النقاط الرئيسية التي حققتها هذه الدراسة، ضمن محاولة تحقيق هدفها الرئيس، اعني تبسيط وتوضيح افكار «الاسس». ويمكن الاشارة الى هذه النقاط فيما يلي:

١ـ حاولت تنظيم البحث في صياغة قضايا العلّية، ورفع بعض الابهامات، التي قد يتركها النص المدروس.

٢ـ استطعت اكتشاف المعادلة الرياضية التي يتم من خلالها البرهنة على الصيغة الرياضية الثانية لقيمة احتمال التعميم الاستقرائي، وهي احدى صيغتين طرحهما الاستاذ لتقييم درجة احتمال التعميم الاستقرائي، وفق مبدأ العكسي، وقاعدة الضرب في العلوم الاجمالية، وكانت الصيغة الاولى:

$$\frac{\text{ع٢ ن}}{\text{ع٣ن}} \text{ ، والثانية: } \frac{\text{٢}^{\text{ن}}}{\text{٢}^{\text{ن}} + \text{ع١ن} - \text{١}}$$

فبرهنت اولاً بطريقة منطقية على المساواة بين:

$\frac{ع_{٢}ن}{ع_{٣}ن}$ ، وبين:

$$\frac{(٢^{ن})^{ع_{١}ن-١}}{(٢^{ن})^{ع_{١}ن-١} + (ع_{١}ن-١)(٢^{ن})^{ع_{١}ن-٢}}$$

واثبت رياضياً أن:

$$\frac{(٢^{ن})^{ع_{١}ن-١}}{(٢^{ن})^{ع_{١}ن-١} + (ع_{١}ن-١)(٢^{ن})^{ع_{١}ن-٢}} = \frac{٢^{ن}}{٢^{ن} + (ع_{١}ن-١)}$$

وبذلك يثبت أن:

$$\frac{ع_{٢}ن}{ع_{٣}ن} = \frac{٢^{ن}}{٢^{ن} + ع_{١}ن-١}$$

٣ـ رفعت الابهام بشكل لا غبار عليه حول تفسير المقام في كسر الاحتمال العكسي، الذي يُقيَّم في ضوءه احتمال التعميم الاستقرائي، في التطبيق الأول.

على أن أنوه في هذا المدخل الى النقاط التالية:

أولاً: كتبت الفصول الرئيسية في هذه الدراسة، ثم القيتها على بعض النابهين من طلاب الدراسات الاسلامية، وحاولت كراراً ان اعيد النظر في مضامين ما طرح. ورغم ثقتي التامة في تحري الامانة والوضوح، وسيادة روح الدفاع عن فكر الاستاذ في ما كتبت، ولكن للحق والانصاف يجب ان أُقرر، أنه اذا كان هناك من هفوة أو خطأ في دراستي فهو منّي، ونتيجة قصوري، وعلى من يريد تقويم دراسة «الاسس»، وهو قادر على فهمه، ان يرجع لما كتبه الراحل العظيم، فهو المعبّر بحق عن افكاره.

ثانياً: اؤكد ان محاولتي في هذه الدراسة محاولة تعليمية في روحها العامة، ومن هنا حاولت عرض الكثير من قضايا البحث بشكل مبسط جداً. خصوصاً قضايا الرياضة البحتة، وعليه سيغفر لي المختصون في هذا الحقل الخروج عن مألوف طريقتهم، لأن مخاطبي ـ في الأعم الأغلب ـ يحتاج الى ايضاحات ترجع في بعض الأحيان الى المبادئ الاولية في الحساب.

ثالثاً: استبعدت نهائياً النقد والاعتراض، يحدوني الى هذا الاستبعاد سببان رئيسيان، أولها اشرت اليه، وهو أن اطروحة «الاسس المنطقية للاستقراء» لم تهضم بعد، ومن ثمّ يصبح الحوار النقدي حول هذه الاطروحة أقرب شيء الى حوار البكم. فأي نفع في نقش النقود وتسطير الاعتراضات، ما دامت معالم العرش غير واضحة، وقديماً قالوا: «العرش ثم النقش».

والسبب الثاني، الذي يحدوني الى تجنب روح النقد، هو عدم مجاراة

وتصديق مشروعية بعض مراهقي الفكر، الذين أرادوا من اصطناع منهج النقد ـ وبشكل مشوّه ـ استهداف عملاق فكري، لتحقيق أهداف دانية، أبعد ما تكون عن روح العلم والشريعة.

على ان أؤكد انني ضد تحريم نقد فكر «الصدر» أو احتكاره، لأنه تحريم يبطل العقد، كما يتناقض مع روحه الكبير الذي علّمنا النقد والاعتراض والتحليل، وقبول الحقائق بالدليل. خصوصاً وأنا أراه كثيراً وهو متألم بسخرية، ولسان حاله يقول:

«أنا لا اجيز التمسك بالعام في الشبهة المصداقية... وقد اصبحت ملكاً مشاعاً، بعد خلوصي من التراب، وعلى من يدّعي ارث تركتي ان يثبت دعواه مصداقياً، والحكم الفكر والنابهون من حملته.. وان ابيتم تنكب هذا السبيل فلا اعدو ان اكون بينكم ـ عما قريب ـ كما قال الله تعالى:

﴿كماء انزلناه من السماء فاختلط به نبات الارض فاصبح هشيماً تذروه الرياح وكان الله على كل شيء مقتدراً...﴾».

ولعل هناك من ينقض على كاتب هذه السطور، ويقول:

لقد أشرت في أكثر من موضع الى استبدال بعض الصيغ أو التفسيرات المطروحة في «الاسس»، وهل هذا غير النقد والاعتراض ؟!

كلاّ، ليس هذا من النقد والاعتراض في شيء، لقد اردت تدعيم وتقويم ما لاح لي بحاجة لذلك، أي: انني استهدفت الدفاع عن الاساس النظري، الذي طرحه الاستاذ، وحينما استبدل بعض التفاصيل، بما اقدر انه الافضل، فهذا يعني انني لا زلت أحد أنصار النظرية، ولم اخرج عن اطارها العام.

أجل: لقد لاح لي في بعض المواقع التفصيلية ضرورة الاشارة الى الفرق بين ما جاء في الاسس، وبين ما اطرحه، كدفاع عن نظرية الاحتمال، التي طرحها استاذنا الراحل، حفظاً للامانة في الطرح، ولكي أكون أنا الهدف في التجريم،

حينما يكون هناك تناقض أو خطأ. فيحفظ حق الاستاذ، وتحفظ معه الامانة العلمية.

رابعاً: ان الفيلسوف الفقيد طرح في «الاسس» نظريتين أساسيتين، تناولت الاولى تفسير الاحتمال وصياغة نظرية جديدة للاحتمال، تمّ له على هديها تفسير الدليل الاستقرائي، ومن خلال تفسير الاستقراء على اساس نظرية الاحتمال يمنح التعميم الاستقرائي تصديقاً منطقياً، لكنه تصديق ناقص، لا يبلغ درجة القطع واليقين. وقد انصبت جهودنا في هذه الدراسة على بيان هذه النظرية وتبسيط عرضها.

اما النظرية الثانية فهي اتجاه جديد في تفسير اليقين الاستقرائي، والمعرفة البشرية بعامة. حيث يمنح الدليل الاستقرائي في مراحل متقدمة يقيناً، لكنه غير ضروري، ومن ثمّ فهو غير منطقي، وفي الوقت ذاته ليس يقيناً فوضوياً قائماً على أساس النزعة السيكولوجية المحضة، بل هو يقين يرتكز على مبررات موضوعية، وله شروطه المنطقية. آمل باذنه تعالى ان أتوفر على فرصة لعرض هذا الاتجاه وتحليله ـ في دراسة قادمة.

ولا بد ان اؤكد هنا على ان دراستنا لنظرية الاحتمال وتفسير الدليل الاستقرائي على أساس هذه النظرية انصبت على عرض العمود الفقري والاسس النظرية التي طرحها الاستاذ. أي أن هناك تفصيلات اخرى آثرنا عدم ذكرها في هذه الدراسة، لأن اغفالها لا يؤثر على البناء الأساسي للنظرية، مضافاً الى تيسير البحث امام القارئ المتعلم، اذ ان الدخول في التفريعات والتفاصيل يراكم مادة البحث، فيعسر هضمها واستيعابها، ويشوّش على المتابع الصورة، التي نريد عرضها واضحة جلية.

ويلوح لي ان الخطوة القادمة، التي يتوجب طيها، هي: القيام بمقارنة شاملة بين نظريتي الصدر وراسل في مجال الاستقراء والاحتمال. وسأحاول ـ بعونه تعالى ـ تعلم لغة القوم بشكل أفضل. على أن اشير الى ان تعاملي مع النص

الانجليزي ـ فعلاً ـ يتم عادة بالاستعانة بالترجمات التي اطمئن بها، أو بعارفي هذه اللغة من الاصدقاء.

وأخيراً لا بد من الاشارة الى طبيعة المصادر، التي اعتمدتها في هذه الدراسة، خصوصاً مصادر الحساب الرياضي. لقد جاء ذكر عدة مصادر اضافية لما اعتمده السيد الاستاذ في «الاسس» من مصادر، كما اهملت ذكر المصادر، التي استعنت بها في تحرير حساب الاحتمال، يبرر لي ذلك عمومية هذا الحساب ووضوح عملياته لدى المختصين. على ان اشير الى ان كثيراً من الامثلة استقيتها من مصادر انجليزية مترجمة أو غير مترجمة. كما افدت كثيراً من دراسة روسية مترجمة الى اللغة العربية، وقد جاءت في كتاب صغير، تحت عنوان «المبادئ الاولية لنظرية الاحتمالات»، تأليف جنيدينكو، خينتشين، بلا ذكر اسم المترجم.

وفي الختام ارجو أن أكون قد حققت ما رجوت تحقيقه، عبر هذه الدراسة، شاكراً ـ سلفاً ـ قراءها الناقدين عن بصيرة، راجين منه القبول.

عمار ابو رغيف

في الرابع عشر من رجب ١٤١٠



الفصل الاول

الاستقراء ما قبل نظرية الاحتمال

تعريف الاستقراء

١ـ الاستقراء عند أرسطو

٢ـ الاستقراء في المدرسة الأرسطية

٣ـ الاستقراء منذ النهضة الاوربية الحديثة



الفصل الاول

الاستقراء ما قبل نظرية الاحتمال

ماهـو الاستقراء؟ الاستقراء هو تتبع الجزئيات بغية الوصول الى حكم عام ينسحب على كل الجزئيات. ولا يراد بالجزئي هنا الجزئي الحقيقي، بل الاعم منه ومن الجزئي الاضافي. ويقابله القياس، حيث ينتقل الذهن فيه من حكم كلي تتضمنه المقدمة الى حكم اقل عمومية او مساوي في كليته للمقدمات.

هناك ابهامات اثارتها البحوث الحديثة حول دلالة مصطلح الاستقراء:

«استقراء: حد من الحدود الاصطلاحية في المنطق، بَيْد انه ليس له ـ لسوء الحظ ـ معنى واضح تمام الوضوح، اذ يستعمل على الاقل بطريقتين: يستعمل في الطريقة الاولى ليدل على اي عملية ليست استنباطاً يحاول فيها المرء ان يبرر قبـولـه لنتيجـة ما، فعمليات الـرياضة والمنطق الخالص استنباطية، اما ادلة العالم ومتعقب الجريمة فهي استقرائية. بَيد ان هذا الحد يستخدم ايضاً ـ وخاصة عند بوبر وعند هؤلاء الذين يوافقونه في الرأي ـ ليدل على رأي خاص عن الكيفية التي يحاول بها العلماء ومتعقبو الجريمة تبرير نتائجهم، وهو الرأي الذي نجده لدى بيكون وج. س. مل، والذي يقـول ان قوانين العلم ونظرياته امر نصل اليه بوساطة نوع خاص من الحجاج تكون فيه المقدمات قضايا مفردة الموضوع ومستقاة من الملاحظة

والتجربة.» [١]

نلاحظ ان هذا النص تعوزه الدقة المطلوبة في تقرير قضايا المنطق والحكمة. ولايضاح هذه الملاحظة نأتي اولاً على بيان الفرق، الذي يمكن ان يطرح في ضوء نص الموسوعة بين الاطلاقين لمصطلح الاستقراء:

١ـ يطلق مصطلح الاستقراء، ويراد منه ما يقابل الاستنباط. وهذا يعني ان الدليل الاستقرائي «الاستقراء» لا يشمل سوى«الاستقراء الناقص»؛ لان النتيجة في الاستقراء التام، تحصل بطريقة استنباطية.

٢ـ يُطلق مصطلح الاستقراء، ويراد منه تتبع الجزئيات لاجل الوصول الى الحكم العام، وهذا يعني شمول مصطلح «الاستقراء» لكلا لوني الاستقراء الناقص والتام.

نعود الى نص الموسوعة، حيث اتخذ ـ في الاصطلاح الاول ـ من الاستقراء كل عملية يراد تبرير النتيجة فيها بطريقة غير استنباطية. وهنا نتساءل: ما هو الرأي في النتائج التي يدركها العقل بقوة الحدس المباشر ؟ من الواضح ان هذه النتائج لايمكن تبريرها بطريقة استنباطية، كما لا يمكن ان يطلق على العملية العقلية التي ندرك على اساسها «البديهيات» انها عملية استقرائية!

وهناك امرٌ آخر يتعلق بالاصطلاح الثاني للاستقراء، حيث ترى الموسوعة انه الاصطلاح الذي استخدمه بيكون وجون ستيوات مل، ومن

---

(١) الموسوعة الفلسفية المختصرة، نقلها عن الانجليزية فؤاد كامل، جلال العشري، عبد الرشيد الصادق، اشرف عليها الدكتور زكي نجيب محمود، دار القلم ـ بيروت، ص ٥١.

الواضح لدى المطلعين على تاريخ الفلسفة ان هذين الفيلسوفين استخدما مصـطلح الاستقراء في الاستقراء الناقص، وحاولا ان يضعا منهج العلم، الذي لا يرتكز ـ حسب ما انتهى اليه هذان الفيلسوفان ومن لفَّ لفهم ـ الا على الملاحظة والتجريب، الذي لا يعني لديهم الا الاستقراء الناقص ! وعلى هذا الاساس حقّ لنا ان نتساءل: هل ان الاستقراء في اطلاق بيكون ومل، يختلف عن المصطلح الاول، فهو عملية غير استنباطية على الاطلاق!

هناك مناقشة من لون آخر حول تعريف الاستقراء ، يثيرها النص التالي.

«النظرة التقليدية الى الاستقراء هي انه الانتقال من الجزئيات الى الكليات، او بعبارة ادق: الانتقال مما هو اقل كلية الى ما هو اكثر كلية ـ وذلك في مقابل القياس او الاستدلال القياسي Deduction الذي هو انتقال من الكلي الى الجزئي المندرج تحته، او بعبارة ادق: من الاكثر كلية الى الاقل كلية.

مثال الاستقراء:

الحديد والنحاس والرصاص والذهب...... كل منها يتمدد بالحرارة.

الحديد والنحاس والرصاص والذهب...... كل منها معدن.

.:. المعدن يتمدد بالحرارة.

ومثال القياس :

كل انسان فان.

سقراط انسان.

.:. سقراط فان.

فالاستقراء تعميم من حالات جزئية تتصف بصفة مشتركة.

لكن الاستدلال (او الاستنباط) الرياضي تعميم هو الآخر، اذ فيه ننتقل من حالة او احوال جزئية الى القانون العام او النظرية التي تشملها: فمن مثلث نرسمه ونثبت ان مجموع زواياه يساوي قائمتين (٢ ق) نستنبط النظرية العامه وهي: مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين.

والخلاف بين كلا النوعين من التعميم هو في الالتجاء الى التجربة: فنحن في الاستقراء نستند الى التجربة بينما في الاستدلال الرياضي لا نلجأ الى التجربة. ولهذا يقترح W.E. Johnson («المنطق» حـ ٢، فصل ١٠، ١١) الا نجعل الاستقراء في مقابل الاستنباط، بل التقابل هو بين الاستنتاج البرهاني Demontrative Inference وبين الاستنتاج الاحتمالي Problematic Inference[١].

وبغية ايضاح ما نلاحظه من خلل في نص الدكتور بدوي ـ الذي نستغرب صدوره من باحث متمرس ـ يحسن بنا ان نشير اولاً الى ان مصطلح الاستقراء يستخدم على ثلاثة انحاء:

١ـ تتبع الجزئيات للوصول الى حكم كلي من خلال ملاحظة او تجربة الجزئيات كلها، وهذا ما يطلق عليه الاستقراء التام او الكامل؛ لان الاستقراء يستوعب كامل وتمام الجزئيات، كما يسمى ايضاً الاستقراء التلخيصي، حيث تمثل النتيجة فيه تلخيصاً للمقدمات.

٢ـ تتبع الجزئيات للوصول الى حكم كلي من خلال ملاحظة بعض الجزئيات، وهذا ما يطلق عليه الاستقراء الناقص.

---

(١) موسوعة الفلسفة، الدكتور عبد الرحمن بدوي، ج١، الطبعة الاولى ١٩٨٤، ص ١٤٥.

٣ـ تتبع الجزئيات للوصول الى حكم كلي بقوة الحدس العقلي المباشر، وهذا ما يطلق عليه الاستقراء الحدسي.

والفارق بين الاستقراء الحدسي وبين الاستقراء التام والناقص فارق اساسي، فنحن في الاستقراء التام والناقص نصدر الحكم او قل نصل اليه اعتماداً على ما لاحظناه في الجزئيات، بينما لا يعتمد الحكم في الاستقراء الحدسي على ملاحظة اتصاف الجزئيات، بل يكون الاتصاف والاقتران في الجزئيات مثيراً ومنبهاً لقوة الحدس العقلي لتدرك بشكل مباشر الارتباط الشامل او قل الضروري بين المحمول والموضوع.

ولذا نلاحظ ان السائد في الدراسات المنطقية اطلاق مصطلح الاستقراء على الاستقراء الناقص والتام، اذ الحدس المباشر وإن اعتمد على استقراء الجزئيات، لكن النتيجة فيه لا يبررها منطقياً استقراء الجزئيات، بل النتيجة فيه حكم عقلي اولي. ومن هنا يخرج الاستقراء الحدسي عن دائرة الحجة المنطقية، فهو لا يدرس في اطار ابحاث المنطق الصوري في ابحاث الحجج ؛لانه ليس حجة صورية، كما لا يدرس في اطار البحث عن الاستقراء في المنطق التجريبي، بل قد يتخذه الباحث المنطقي كمصادرة من مصادرات نظرية المعرفة التي يؤمن بها. وعلى كل حال فالحدس المباشر او الاستقراء الحدسي ليس من ابحاث المنطق الاستقرائي صورياً كان البحث ام مادياً.

حتى الآن نستطيع ان نسجل الملاحظة الاولى على نص الدكتور بدوي: ان اعتماد الرياضيات على ملاحظة الجزئيات او قل على استقراء الجزئيات ليس اعتماداً على الاستقراء منطقياً، اي ان الجزئيات لا تبرر ولا

تعطي القاعدة الرياضية يقينها وبرهانيتها، انما تستمد القاعدة الرياضية يقينيتها في ضوء الادراك العقلي بالحدس المباشر. وهذا يعني ان الاستقراء المستخدم في الرياضة هو استقراء حدسي، وليس هو الاستقراء او قل تتبع الجزئيات للوصول الى الحكم العام استناداً الى الجزئيات.

يبقى - لكي تتضح ملاحظتنا الثانية - ان نحدد الفرق بين الاستقراء التام والاستقراء الناقص :

الاستقراء - سواء منه التام ام الناقص - عبارة عن تتبع الجزئيات للوصول الى حكم عام؛ اعتماداً على الجزئيات، ورغم هذا القاسم المشترك هناك سمة للاستقراء التام تميزه بشكلٍ جوهري عن الاستقراء الناقص. وهي ان الاستقراء لكي يكون تاماً ينبغي ان يتم فيه اختبار كل الجزئيات، وهذه السمة تضمن صحة استنتاج النتيجة، وتمنحها يقيناً صورياً، اي ان المقدمات سوف تبرر النتيجة تبريراً منطقياً. ومن هنا يدخل الاستقراء التام في دائرة الادلة الاستنباطية، وهي الادلة التي تضمن فيها صحة النتيجة. والامر في الاستقراء الناقص مختلف، اذ هناك مشكلة الانتقال من عدد محدود من الجزئيات الى حكم عام، ومن هنا فالنتيجة غير مضمونة صورياً، اي انها ليست يقينية، بل تبقى محتملة، مهما اضفنا الى الاختبارات الناجحة اختبارات ناجحة اخرى، وشمل الاستقراء عدداً اكبر من المصاديق والمفردات.

في هذا الضوء نستطيع ان نقرر الملاحظة الثانية على نص الدكتور بدوي؛ بعد ان اتضح لنا ان الفرق بين الاستقراء والاستدل الرياضي يكمن في استناد الاستقراء الى اختبار الجزئيات (ملاحظتها او تجربتها)،

بينا لا يستند الاستدلال الرياضي الى ملاحظة او تجربة الجزئيات.

وملاحظتنا على النص هي:

ان الفرق المتقدم بين الاستقراء والادلة الرياضية يجعل الاستقراء مقابل الحدس العقلي، اي انه يخرج الاستقراء الحدسي من زمرة الاستقراء الذي ندرسه في ابحاث الحجج المنطقية. وهذا الفرق لا يستدعينا ان نجعل الاستقـراء مقـابـل الاستنبـاط، لوضـوح استنـاد الاستقراء التام على الاختبارات مع دخوله في حوزة الادلة الاستنباطية، كما لا يقتضي التمييز بين الاستنتاج الاحتمالي والاستنتاج اليقيني، لكن الموسوعة الفلسفية تقرر: «والخلاف بين كلا النوعين من التعميم هو في الالتجاء الى التجربة: فنحن في الاستقراء نستند الى التجربة بينما في الاستدلال الرياضي لا نلجأ الى التجربة، ولهذا يقترح W.E. Johnson («المنطق» جـ ٢، فصل ١٠، ١١) الا نجعل الاستقراء في مقابل الاستنباط بل التقابل بين الاستنتاج البرهاني وبين الاستنتاج الاحتمالي» ان اقتراح جونسون ـ بغض النظر عن فهم الدكتور بدوي وتفريعه ـ يبتني على اساس سليم في التفرقة بين لونين من الوان الاستدلال، فهناك استدلال يقيني وهناك استدلال احتمالي، والتقابل بين هذين اللونين من الاستدلال لا يلاحظ فيه تتبع الجزئيات والاستناد اليها وعدم ذلك.

بل تقوم التفرقة على اساس التمييز بين النتائج، فالنتائج اليقينية تمنحها الادلة الاستنباطية سواء أكانت رياضية ام لا، والنتائج الاحتمالية هي التي تستخلص في ضوء الاستدلال الاستقرائي الناقص. وحينئذٍ يكون هناك تقابل بين الاستقراء الناقص والاستنباط، وهو تقابل لا مناص منه.

على اي حال يبقى ان نشير الى ان تعريف الاستقراء بانه الانتقال من الجزئيات الى الكليات او السير من الخاص الى العام او.. يستدعي - لكي يكون تعريفاً مانعاً على حد تعبير المناطقة - اضافة قيد الى التعريف وهو: «استناداً الى الجزئيات». لكي يميز بينه وبين الاستقراء الحدسي الذي قد تتخذ نتائجه مصادرات في الادلة المنطقية.

* * *

«١»

الاستقراء عند ارسطو

يرى بعض الباحثين ان ارسطو هو «الذي استخدم مصطلح الاستقراءلأول مرة»[١]. لكن هناك نصاً صريحاً ينقله بعض الباحثين عن «افلاطون» في (فيلابوس ـ ١٦ ب ومايليها): «ان المعرفة الديالكتيكية هي المعرفة الفلسفية بمعناها الكامل، ولا يمكن ان يحصل الانسان على العلم بمعناه الحقيقي الا عن طريق الديالكتيك. والديالكتيك ينقسم الى قسمين: استقراء، وقسمة. اما الاستقراء فهو ان يلاحظ الانسان كل الجزئيات ثم يرتفع من هذه الجزئيات الى الصفة العامة التي تربط هذه الجزئيات بعضها ببعض»[٢].

واياً كان الرأي حول تحديد الحائز على قصب السبق في استخدام مصطلح «الاستقراء»، فالفضل مسجل لارسطو بانه اول من درس «الاستقراء» دراسة منطقية، موضحاً الشروط المنطقية لاستحصال النتيجة.

لقد أُثيرت اشكالات واعتراضات كثيرة حول «الاستقراء» ودلالته لدى ارسطو. فمنذ عصر النهضة حتى يومنا هذا توالت حملات النقد على الاستقراء الارسطي، وبلغت أوجها حينما استهدفت نقض البناء المنطقي الارسطي كله من اساس. ولعلنا نستطيع تحديد موقف واضح من اهم الاعتراضات ،التي وجهت الى المنطق الارسطي، واستيعاب اهم جوانب هذا

---

(١) المنطق الوضعي، الدكتور زكي نجيب محمود، ج٢، الطبعة الخامسة ١٩٨٠، ص١٥٧.

(٢) افلاطون، عبد الرحمن بدوي، الناشر وكالة المطبوعات ـ الكويت دار القلم ـ بيروت ١٩٧٩، ص ١٤٠.

الموضوع، اذا توفرنا على موقف واضح من موضوع «دلالات الاستقراء لدى ارسطو»:

ماهي دلالة «الاستقراء» لدى ارسطو؟

بصدد الاجابة على هذا الاستفهام انقسم الباحثون الى ثلاثة اتجاهات:

الاتجاه الاول: ذهب الى ان ارسطو استخدم مصطلح الاستقراء في ثلاثة معاني، الاول بمعنى الاستقراء الناقص، وجاء ذكره في «الطوبيقا او الجدل» من منطق ارسطو، حيث يعرّف الاستقراء بانه انتقال من الجزئيات الى الكليات. والمعنى الثاني نجده في التحليلات الاولى، حيث ينظر للاستقراء على انه انتقال من خلال احصاء كل الحالات وهو ما يعرف بالاستقراء التام. اما المعنى الثالث فنجده في التحليلات الثانية، حيث يكشف لنا الاستقراء عن الكلي المتضمن في الجزئي المعلوم، وهو ما يعرف بالاستقراء الحدسي[١].

الاتجاه الثاني: ذهب الى ان ارسطو استخدم الاستقراء بمعنيين مختلفين فقط هما، الاستقراء التام والاستقراء الحدسي[٢].

الاتجاه الثالث: ذهب الى ان ارسطو لم يطلق اسم «الاستقراء» على ذلك النوع من الادراك الحدسي الذي يهدينا الى صدق القضايا الكلية

---

(١) فلسفة العلوم، المنطق الاستقرائي، ج١، د ـ ماهر عبد القادر محمد علي، دار النهضة العربية ـ بيروت، ١٩٨٤، ص ١٩ . نقلاً عن «فون رايت».

(٢) كما هو الحال عند «استبنج»، و«د ـ محمود فهمي زيدان»، راجع المصدر السابق، ص ١٩ـ٢٠.

الضـرورية، وقصر التسمية على الاستقراء التام الذي تجيء النتيجة فيه تلخيصاً لمقدماته[١].

وبغية تمحيص هذه الاتجاهات نطرح في البداية الاستفهام التالي:

اين ذكر ارسطو الاستقراء التام؟

اتفق البـاحثون على ان ارسطو ذكر الاستقراء التام في تحليلاته الاولى (من المنـطق). وركّز الجميع على النص الذي ننقله اليك، بوصفه الوثيقة الرئيس، التي يمتلكها الباحثون، واليك النص كاملاً:

«تصديقنا بالاشياء كلها اما ان يكون بالقياس واما ان يكون بالاستقراء.

والاستقـراء هو ان يبرهن باحـد الـطرفين ان الطرف الآخر في الواسطة موجود. ومثال ذلك ان تكون واسطة أ حَ < هي> بَ وأن تبين بـ حَ ان أ موجودة في بَ، لان على هذا النحو يعمل الاستقراء. ومثال ذلك ان يكون أ طويل العمر، وبَ قليل المرارة، وحَـ الجزئيات الطويلة الاعمار: كالانسان والفرس والبغل. فـ أ موجودة في كل حَـ، لان كل قليل المرارة فهو طويل العمر، وبَ ـ اي قليل المرارة ـ موجود في كل حَـ. فان رجعت حَ على بَ الواسطة، فانه يجب لا محالة ان تكون أ موجودة في كل بَ. لانه قد بينا آنفا انه اذا كان اثنان مقولان على موضوع واحد، ثم رجع الموضوع على احد الطرفين، فان الطرف الآخر يقال على الطرف الذي كان عليه جرى الرجوع. وينبغي ان نفهم من حَـ جميع جزئيات الشيء العام، لان

---

(١) المنطق الوضعي، ج٢، ص ١٦٣.

الاستقراء لجميع جزئيات الشيء العام يبين النتيجة»[١].

- من الواضح - في ضوء هذا النص - ان ارسطو لم يستخدم مصطلح «الاستقراء التام» بحده اللفظي، انما اشترط لبيان النتيجة على اساس الاستقراء ان يكون الاستقراء، شاملاً لجميع الجزئيات. وعلى هذا الاساس نستطيع ان نقرر بوضوح ان ارسطو لم يقصر مصطلح الاستقراء، على الاستقراء الكامل او التام، بل اتى على ذكر احصاء جميع الجزئيات، كشرط لضمان صحة الاستدلال الاستقرائي صورياً، فهو يتحدث عن الاستقراء في اطار المنطق الصوري، ولا اشكال بين رجال المنطق على مختلف مدارسهم في سلامة هذا الاشتراط، واستقامة كلام ارسطو. حيث ان النتيجة في الاستقراء التام مساوية للمقدمات، ومن ثم يتوفر الانتقال من المقدمات الى الحكم «النتيجة» على شروط الاستدلال الصوري السليمة.

وعلى هذا الاساس حقّ لنا ان نستغرب من اولئك الباحثين، الذين اكدوا على ان ارسطو في التحليلات الاولى عني بالاستقراء «الاستقراء التام». وتأسيساً على هذا الفهم الخاطئ لدلالة النص الارسطي، فسر بعض الباحثين العبارة اللاحقة تماماً للنص المتقدم، حيث قال ارسطو:

«وينبغي ان تعلم ان الاستقراء ينتج ابداً المقدمة الاولى التي لا واسطة لها، لان الاشياء التي لها واسطة، بالواسطة يكون قياسها. < اما الاشياء التي لا> واسطة لها فان بيانها يكون بالاستقراء»[٢].

---

(١) منطق ارسطو. حققه وقدم له الدكتور عبد الرحمن بدوي. الناشر وكالة المطبوعات و دار القلم - بيروت. ١٩٨٠. ج١. ص ٣٠٧.

(٢) منطق ارسطو. حققه وقدم له الدكتور عبد الرحمن بدوي. الناشر وكالة المطبوعات و دار القلم - بيروت. ١٩٨٠. ج١. ص ٣٠٧.

فقال بعض الباحثين ان ارسطو يعني ان المقدمات والمبادئ الاولية تؤخذ عن طريق الاستقراء التام!

وعلى اساس هذا الفهم الخاطئ للنص الارسطي سُجل الاعتراض الرئيس، الذي استهدف البناء المنطقي الارسطي برمته، فقالوا:

ان ارسطو في هذا النص وثق بالاستقراء الكامل، واتخذ منه الاساس لكل الاقيسه والبراهين، لان كل البراهين تستمد من المقدمات الاولية وهذه المقدمات تثبت بالاستقراء.

فاذا افترضنا ان الاستقراء الكامل ينتج قضية برهانية (اي قضية يكون ثبوت المحمول للموضوع فيها ضرورياً)،فهذه الضرورة لاتتضمن في المقدمات،وحينئذٍ تكون النتيجة اكبر من المقدمات،ويكون الاستقراء التام غير مضمون الصحة صورياً. واذا افترضنا ان النتيجة، التي يفرزها الاستقراء التام لا تؤكد ضرورة ثبوت المحمول للموضوع، فهذا يعني ان النتيجة الاستقرائية ليست قضية برهانية، وبذلك ينهار صرح البرهان كله، لانه يرتكز على المقدمات الاولية، اي المبادئ الاولى للبرهان، وهذه المقدمات والمبادئ تستمد طابعها البرهاني ومبررها المنطقي في رأي ارسطو، من الاستقراء الكامل. فاذا عجز الاستقراء الكامل عن انتاج قضية برهانية، فقدت بذلك المقدمات الاولية صفتها البرهانية وضرورتها المنطقية ومن ثم يتداعى بناء البرهان والعلم الارسطي كله.

«فالبناء المنطقي كله عند ارسطو، اساسه في النهاية عملية استقرائية يتحتم فيها ـ من وجهة نظره ـ ان نستقصي الامثلة الجزئية كلها حتى

نضمن اليقين؛ ولو انهار هذا الاساس انهار في اثره البناء كله»[١].

مضافاً الى الاستغراب المتقدم، وان ارسطو لم يقصر مصطلح الاستقراء على الاستقراء التام في نص التحليلات الاولى، نستغرب ثانياً من اغفال مسجلي الاعتراض المتقدم قضية واضحة جداً، وهي ان ارسطو عقد بحثاً مستقلاً في التحليلات الثانية خصّه لبحث مصدر المبادئ والمقدمات الاولى، وقال:

«فاما في المبادئ: كيف تكون معلومة، واي ملكة هي عارفه بها، فليكن ذلك ظاهراً من ها هنا........ فمن الحس يكون حفظ كما قلنا، ومن تكرير الذكر مرات كثيرة تكون تجربة، وذلك ان الاحفاظ الكثيرة في العدد هي تجربة واحدة.......

وما قلناه من اول الامر ولم نفصح به ونظهره فلنخبر به من الرأس. فنقول: انه عندما يثبت في النفس من غير المختلفة شيء واحد على قباله الكلي: وذلك انها تحس بالجزئي احساساً، واما الحس فهو بالكلي: مثال ذلك بالانسان، لا بانسان هو قالياس، ثم نقف في هذه من الرأس الى ان تثبت فيها معانٍ لا تتجزأ وتلك الكلية: مثال ذلك من هذا الحيوان الى الحيوان، وهذا هو واحد على مثال واحد.

فمن البين انه قد يلزم ان نعلم الاوائل بالاستقراء، وذلك ان الحس انما يحصل فيها الكلي بالاستقراء على هذا النحو.... فيكون العقل هو مبدأ العلم»[٢].

---

(١) المنطق الوضعي. ج٢. ص ١٥٨.

(٢) منطق ارسطو. ج٢. ص ٤٨٢-٤٨٥.

ومن الـواضـح على اساس هذا النص ان الاستقراء الذي يعنيه «ارسطو» كمنطلق لادراك المبادئ الاولية ليس هو الاستقراء التام. انما هو تتبع الجزئيات للوصول الى الكلي بقوة الحدس العقلي، ومن ثم فالاستقراء هنـا يكـون بمثـابـة المحفـز والمنبـه لادراك الكليات. وهذا المفهوم عن الاستقراء، او قل هذا الاستخدام لمصطلح الاستقراء هو عين ما يقرره ابن سينا في اكثر من نص :

«ومقدمات البرهان كلية، ومبادئها انما تحصل بالحس، وبأن تكتسب بتوسطه خيالات المفردات لتتصرف فيها القوة العقلية تصرفاً تكتسب به الامور الكلية مفردة، وتركبها على هيئة القول. وان رام احد ان يوضحها لمن يذهل عنها ولا يحسن التنبه لها، لم يمكن الا باستقراء يستند الى الحس لانها اوائل»[١].

«واما الكائن بالاستقراء فان كثيراً من الاوليات لا تكون قد تبينت للعقل بالطريق المذكور اولاً. فاذا استقرأ جزئياته تنبه العقل على اعتقاد الكلي من غير ان يكون الاستقراء الحسي الجزئي موجباً لاعتقاد كلي البتة بل منبهاً عليه»[٢].

وعـلى اساس النص الارسطي المتقدم اعجب من تأكيد الدكتور زكي نجيب محمود على:

«ولم يطلق ارسطو اسم الاستقراء على هذا الفعل العقلي مع اننا نستطيع ان نسميه الاستقراء الحدسي، الذي رأى القانون العام من النظر

---

(١) منطق الشفاء، ابن سينا، تحقيق ابو العلاء عفيفي، ج٣ ص ٢٢٠، كتاب البرهان، الفصل السابع.
(٢) منطق الشفاء، ابن سينا، تحقيق ابو العلاء عفيفي، ج٣ ص ٢٢٣، كتاب البرهان، ص ٢٢٣.

الى جزئية واحدة، اذا كانت هذه الجزئية الواحدة تكفي العقل ان يدرك الرابطة الضرورية بين الصفات»[١].

على اي حال ـ وقبل الانتقال الى الموقف الارسطي من الاستقراء الناقص ـ تبقى امامنا مسألتان حول الاستقراء التام عند ارسطو والارسطيين، تحسن الاشارة اليهما، تاركين التفصيل لابحاث المنطق الصوري، حيث موقعهما:

١ـ ما هو مدلول «الحد الاوسط» و«الحد الاصغر» في الاستقراء لدى ارسطو؟

٢ـ ما هي العلاقة بين الاستقراء التام والقياس لدى ارسطو؟

بصدد المسألة الاولى لم نتبين مدلول «الحد الاوسط»، و«الحد الاصغر» في تصنيف ارسطو لقضايا الاستنتاج الاستقرائي، سوى اننا لاحظنا احد الباحثين المعاصرين يوعز الامر الى حرية الاختيار! فيقول:

«بهذا نستطيع ان نفهم اللغة الاصطلاحية التي استعملها ارسطو في هذا الموضوع، اذ قال: ان الاستقراء هو البرهان على نسبة الحد الاكبر للحد الاوسط بواسطة الحد الاصغر (وهو يستعمل الفاظ «الاكبر» و«الاوسط» و«الاصغر» لا بالنسبة لمواضع الحدود في القياس كما هي العادة اليوم، بل بالنسبة لاتساع مجال المسميات)»[٢].

لكن «لوكاشيفتش» عالم المنطق البولندي يرى ان اصطلاح «ارسطو» وتعريفه للحد الاكبر والاصغر والاوسط مشوش حتى في مجال

---

(١) المنطق الوضعي، ج٢، ص ١٦٥.

(٢) المنطق الوضعي، ج٢، ص ١٥٧.

الاستنتـاج القياسي: «هناك خطأ ارتكبه ارسطو في «التحليلات الاولى» كانت نتائجه على قدر اكثر من الخطورة وهو يتصل بتعريفه للحد الاكبر والحد الاصغر والحد الاوسط...»[١].

وفيما يتصل بالمسأله الثانية فقد اكد ارسطو على انه:

«ينبغي الآن ان نبـين انه ليس فقط المقاييس الجدلية والبرهانية تكـون بالاشكـال التي قيلت، ولكن ايضـاً والمقـابيس الخطبية والفقهية والمشورية، وفي الجملة كل ايمان في كل صناعة فكرية فانه بالاشكال التي قيلت تحدث»[٢].

لعل هناك باحثاً يستطيع ان يفهم من الجملة الاخيرة ان ارسطو ارجع الاستدلال بالاستقراء التام بوصفه ايماناً ويقيناً الى الاشكال القياسية التي ذكرها، دون ان يحدد المرجع الى اي شكل من تلك الاشكال.

على ان نشير الى ان «ابن سينا» اكد ارجاع الاستقراء التام الى القياس المقسمي»[٣].

نعود الى البدء لنطرح استفهاماً آخر: هل ان ارسطو اطلق مصطلح الاستقراء على «الاستقراء الناقص» ام لا؟

يتمسك اصحاب الاتجاه الاول ـ الذين يتبنون الاجابة بالايجاب على الاستفهام ـ بالنص الوارد في «الطوبيقا ـ الجدل» من منطق ارسطو، حيث قال:

---

(١) نظرية القياس الارسطية، يان لوكاشيفتش، ترجمة الدكتور عبد الحميد صبره الناشر منشأة المعارف بالاسكندرية ١٩٦١، ص ٤٤.

(٢) منطق ارسطو، ج١، ص ٣٠٦ـ٣٠٧.

(٣) الشفاء، المنطق، ج٢، ص ٣٤٩، ص ٥٥٩.

«واما الاستقراء فهو الطريق من الامور الجزئية الى الامر الكلي ـ مثال ذلك انه اذا كان الربان الحاذق هو الافضل، فالامر كذلك في الفارس ؛ فيصير بالجملة الحاذق في كل واحد من الصنائع هو الافضل» .

وانا لا استطيع ان افهم من هذا النص ـ كما هو الحال في فهم نص التحليلات الاولى المتقدم ـ سوى ان «ارسطو» يرى الاستقراء عبارة عن الانتقال الى الحكم الكلي من خلال تتبع الجزئيات واختبارها، خلافاً للقياس حيث يستدل الحكم الكلي فيه من خلال حكم كلي اعم او مساوي للنتيجة. وحيث ان «ارسطو» كان يتحدث في التحليلات الاولى في اطار تحديد الشروط الصورية لصحة الاستنتاجات منطقياً، اتى هناك على ذكر استيعاب جميع الجزئيات كشرط لسلامة الاستنتاج الاستقرائي صورياً. اما هنا ـ و«ارسطو» يتحدث عن صناعة الجدل ـ فاتى على ذكر مثالٍ للاستقراء الناقص، حيث النتيجة الظنية.

واذا سلّمنا ان ارسطو لم يذكر الاستقراء الناقص في منطقه ـ رغم النصوص المتقدمة ـ فلا يصح التسليم بان ارسطو لم يذكر الاستقراء الناقص اطلاقاً؛ اذ تحدث «ارسطو» في «الفيزيقا ـ الطبيعيات» عن المصادفة والتلقائية في اطار بحثه عن العلية، وهو في حديثه هناك يقرر المبادئ الاساسية، التي اعتمدها شراحه ومتابعوه في دراسة الاستقراء الناقص، وليس كما يبدو اضافة جديدة حققها الشراح للبحث المنطقي في الاستقراء الناقص.

تناول ارسطو تعريف الاتفاق والمصادفة مقرراً انها «الحدوث بالعرض لوقائع قابلة لان تكون غايات لو كانت (هذه الغايات) صادرة

عن الفكر والاختيار»[١]، ويرى «ارسطو» ان الاحداث والاقترانات الشاذة هي التي يمكن ان نفسرها على اساس المصادفة، اي على اساس انها اقترانات عرضية، لا تحكمها الضرورة[٢].

وقد ميّز «ارسطو» بين الاقترانات غير الشاذة، فقسّمها الى قسمين رئيسيين: وقائع تقع على وجه دائم، واخرى تقع بشكل اكثري. وقد قرر «ارسطو» ان كلا القسمين لا يمكن تفسيرهما على اساس الاتفاق والصدفة، اي على اساس الوقوع العرضي، بل الاتفاق لا يكون دائمًا او اكثرياً وما هو دائمي او اكثري يحدث على اساس علاقة ذاتية، اي لضرورة العلية[٣].

ومن هنا حق ان نتساءل: ما هي الوقائع التي تحدث بشكل اكثري او دائمي؟ يضرب ارسطو لذلك مثلاً، فالنار تحرق الحطب دائمًا، ومن خرج من بيته يصل الى مقصده بشكل غالب. وفي ضوء هذه الامثلة وفي ضوء ما قرر «ارسطو» في البحث عن الاتفاق نلاحظ: ان المنهج في هذا الموضوع منهج استقرائي، اي ان النار تحرق الحطب، ومن خرج من بيته يصل الى مقصده غالباً معطيات استقرائية. واذا اشكل على بعض الباحثين تفسير المثال الاول على اساس الاستقراء الناقص بحكم الابهام الذي تثيره كلمة «الدائم»، فيخيل له ان ارسطو يريد بذلك الاستقراء التام! لا يمكن ان نفهم من الوقائع والاقترانات الاكثرية الا الاستقراء الناقص، اي ملاحظه الجزئيات الكثيرة، للوصول الى الحكم العام، مستعينين بقاعدة «الدائم والاكثري لا يكون عرضياً»، والتي صاغها ابن سينا صياغة اخرى:

---

(١) ارسطو، عبد الرحمن بدوي، الطبعة الثانية ١٩٨٠، ص ١٣٧، نقلاً عن ارسطو.

(٢) ارسطو، عبد الرحمن بدوي، الطبعة الثانية ١٩٨٠، ص ١٣٦، نقلاً عن ارسطو.

(٣) فلسفة المصادفة، محمود ابن العالم، ص ٦٠.

«الاتفاق لا يكون دائماً او اكثرياً».

وخلاصة ما يمكننا تقريره ـ بشأن الاستقراء عند ارسطو ـ هي:

١ـ ان ارسطو التفت بشكل واضح وجلي الى نوعي الاستقراء الرئيسين، الاستقراء التام، والاستقراء الناقص.

٢ـ ان ارسطو لم يعنِ بالاستقراء ـ في قوله ان الاستقراء هو الذي يزودنا بالمقدمة الاولى ـ الاستقراء التام، بل لم يرد النتيجة الاستقرائية، انما اراد بذلك ان ادراك الاوائل يتم عادة من خلال الاستعانة بتتبع الجزئيات، ليتنبه العقل الى ادراك العلاقة الضرورية بين الصفات التي يدركها الحس في الجزئيات.

٣ـ ان ارسطو لم يقرر ان الاستقراء التام هو منهج العلم، بل اشترط ذكر تمام الجزئيات في الاستقراء، ليصح استنتاج النتيجة العامة، اي ان ذكر تمام الجزئيات في المقدمة هو الذي يحقق الضرورة الصورية، التي نضمن بها صحة الاستنتاجات الصورية بعامة. فالضرورة اما ان تكون ضرورة ولزوماً لصحة صورة الاستنتاج، واما ان تكون ضرورة ولزوم لصحة مادة الاستنتاج. وكلا هاتين الضرورتين امران لازمان لحصول البرهان واتصاف الاستنتاج بصفة البرهانية، عند ارسطو.

٤ـ ان الضرورة الصورية يضمنها ارسطو من خلال الاشكال القياسية، اما الضرورة المادية فتتحقق من خلال ادراك العقل بقوة الحدس المباشر القائم على اساس تتبع الجزئيات. او قل من خلال الاستقراء الحدسي.

٥ـ في ضوء ما تقدم يتضح ان كثيراً من الاعتراضات والنقود، التي

وجهت لارسطو، لا يصح تفسيرها على اساس قراءة علمية متأنية للنص الارسطي. انما يمكن تفسيرها على اساس ما سنلاحظه في «٦»، او على اساس الجو العام الذي ساد الفكر الغربي منذ عصر النهضة حتى بدايات القرن الحالي؛ حيث ادانة منطق ارسطو، وسلخ اي فضيلة عن المنطق الاستنباطي؛ لانه منهج لا يلتئم مع التجريب العلمي. على ان نشير الى ان المنهج الاستنباطي اخذ يستعيد عافيته في ظل التطورات الاخيرة التي طرأت على مناهج العلوم، وبعد صحوة العقل الحديث من لوثة التجريبية الساذجة، فاضحت الرياضة ـ وهي ام الاستنباط ـ عنصراً اساسياً في اغلب العلوم المعاصرة، ومن ثمّ اصبح الاستنباط عضداً للاستقراء في الكشف والاستنتاج.

٦ـ بالرغم من طرح «ارسطو» لاهم الافكار الاساسية في الاستقراء، التي انتظمت على اساسها ابحاث متابعيه من المناطقة لكن يتسجل عليه مضافاً الى شيء من الغموض والارتباك فيما نُقل الينا من نصوصه، ان البحث غير مستوعب ويعوزه كثير من التنظيم. ويغفر لارسطو هذه النقائص انه اول من تناول هذا الموضوع بالدرس والتحقيق.

ولكن ما هي الصورة المنظمة، التي عرضتها المدرسة الارسطية للاستقراء الناقص ؟ وسوف نحاول الاجابة على هذا الاستفهام في الفقرة التالية.

* * *

«٢»

الاستقراء في المدرسة الارسطية

لعل الفيلسوف الاسلامي «ابو علي ابن سينا» هو الشاخص المتميّز بين رجال المدرسة الارسطية في موضوع بحثنا، بفضل الطرح المنظم والواضح لافكار المؤسس «ارسطوطاليس». ولعل الباحث لايعثر على جديد حول «الاستقراء» في المدرسة الارسطية، مضافاً لما طرحه «ابن سينا» في دراساته المنطقية. وعلى هذا الاساس نقصر بحثنا على عرض «ابن سينا» لقضايا الاستقراء ومشكلاته.

أـ الاستقراء التام:

تبين لنا من خلال الفقرة السابقة من البحث بعض ما طرحه «ابن سينا» من افكار بشأن الاستقراء الكامل، خصوصاً بصدد العلاقة بين الاستقراء وادراك القضايا الاولية. واتضح لنا ان موقف «ابن سينا» لم يختلف عن موقف سلفه «ارسطو»، بل جلّى ما اجمله.

يُلاحظ ان «ابن سينا» يرى الاستقراء المستوفي «التام» موجباً لليقين اذا اعتمد على اليقين في قضاياه الجزئية، اما من اين يأتي اليقين بالجزئيات؟ هل يأتي بالاستقراء ذاته، ام انه يأتي عن طريق الاستقراء ولكن بقوة الحدس العقلي؟

لاحظنا ان مجرد استقراء الجزئي لا يوجب اليقين بقيام العلاقة بين موضوع القضية الجزئية ومحمولها عند ابن سينا، بل يحصل ذلك بقوة الحدس العقلي، وما استقراء الجزئيات الا منبه لقوة الحدس ومرشد اياها الى ادراك

العلاقة الضرورية.

لم يكتف «ابن سينا» بكشف اللثام وازالة اللبس عما اكتنف عبارات المعلم الاول في موضوع العلاقة بين الاستقراء وادراك الاوائل. بل حاول ان يوضح ما اجمله «ارسطو» بشأن العلاقة بين الاستقراء التام والاشكال القياسية المنتجة.

يقول «ابن سينا»:

«في القياس المقسم على نمط الاشكال الثلاثة: فمن ذلك قياسات مؤلفة من منفصلة، ومن حمليات كثيرة على قياس الاستقراء»[1].

وقال:

«فالاستقراء اعم من الاستقراء المستوفي الذي هو بالحقيقة قياس مقسم، ومن...»[2].

ولكن كيف ارجع «ابن سينا» الاستقراء التام الى القياس ؟ وعلى اي اساس منطقي صح له هذا الارجاع؟

هذه مشكلات لا ترتبط بالبحث في منطق الاستقراء المعاصر، اذ ان المنطق الاستقرائي ينصب اساساً على معالجة مشكلات الاستقراء التجريبي «الناقص». اما بشأن قضايا الاستقراء التام فيكتفي الباحثون في منطق الاستقراء بالارجاع الى المنطق الاستنباطي.

وفي المنطق الاستنباطي استفهام اشمل. اختلف رجال المنطق في الاجابة عليه الى مدارس، والسؤال هو: هل ان القضايا الاستنباطية باسرها

(١) الشفاء، المنطق، ج٢، ص ٣٤٩.

(٢) المصدر ذاته، ص ٥٥٩.

ترجع الى القياس، وان نظرية القياس تستوعب كل قضايا الاستنباط، ام لا؟ وهناك اي في المنطق الصوري تطرح هذه الاسئلة وتطرح المواقف ازاءها.

ب ـ الاستقراء الناقص :

جاء في كتاب البرهان من الشفاء:

«واما التجربة فانها غير الاستقراء، وسنبين ذلك بعد. والتجربة مثل حكمنا ان السقمونيا مسهل للصفراء، فانه لما تكرر هذا مراراً كثيرة، زال عن ان يكون مما يقع بالاتفاق»[١].

وجاء ايضاً:

«فان الاستقراء اما ان يكون مستوفياً للاقسام، وام ان لا يوقع غير الظن الاغلب، والتجربة ليست كذلك»[٢].

يتضح في ضوء نصوص «الشفاء» ان «ابن سينا» يميز بين الاستقراء التام والاستقراء الناقص. ويرى ان الاستقراء الناقص : اي مجرد مشاهدة بعض الجـزئيات، يؤدي الى ترجيح النتيجة «الظن الاغلب». والاستقراء الناقص بذاته لا يمكن ان يؤدي بنا الى يقين لانه لا يتحول الى قياس. بينما يمكن للاستقراء الناقص ان يتحول الى قياس ويؤدي الى اليقين عندما يمكن ان نضم اليه قاعدة عقلية تشكل كبرى لقياس الاستقراء، وحينئذ لا يحتفظ الاستقـراء النـاقص باسمـه، بل سوف يطلق عليه ابن سينا مصطلحاً آخر هو «التجربة».

---

(١)، (٢) منطق الشفاء، ج٣، ص ٩٥.

التجربة ـ عند ابن سينا ـ تعني اننا نقوم باستقراء ناقص، فنستقرأ بعض الجزئيات، كما لو تتبعنا بعض قطع الحديد فوجدناها تتمدد بالحرارة، وعند هذا الحد من التتبع يحصل لدينا ظن راجح بالقضية الكلية [كل قطع الحديد تتمدد بالحرارة]. ولكن اذا تكرر اقتران تمدد الحديد بتسليط الحرارة عليه مراتٍ كثيرة جداً، علمنا ان الحرارة بذاتها او لامر ملازم لها علةٌ لتمدد الحديد، وان اقتران تمدد الحديد بالحرارة ليس عرضياً، بل لامر ذاتي وهو علاقة العلية بين تمدد الحديد والحرارة؛ لان الامر العرضي والاتفاقي لا يحصل كثيراً.

يتضح اذن: ان الاساس الرئيس الذي يتم به تحويل الاستقراء الكامل الى تجربة هو القاعدة التي تقول: «ان الاتفاق لا يكون دائماً او اكثرياً»، فنحن بفضل هذه القاعدة ندرك ان العلاقة بين «التمدد والحرارة» ـ في المثال المتقدم ـ هي علاقة العلية، وان الحرارة سبب لتمدد الحديد.

اي: ان الاستقراء يحقق لنا صغرى القياس وهي عبارة عن ان بعض قطع الحديد تتمدد بالحرارة دائماً او اكثرياً، والقاعدة العقلية «كل اتفاقي لا يكون دائماً او اكثرياً» تشكل كبرى القياس. وفي هذا القياس نستنتج ان هناك علاقة سببية بين تمدد الحديد والحرارة، وبذلك يمكننا التعميم ان الحديد يتمدد بالحرارة.

يقول ابن سينا: «انه لما تحقق ان السقمونيا يعرض لها اسهال الصفراء وتبين ذلك على سبيل التكرار الكثير ، علم ان ليس ذلك اتفاقاً فان الاتفاقي لا يكون دائماً أو اكثرياً. نعلم ان ذلك شيء يوجبه السقمونيا طبعاً.... فصح بهذا النوع من البيان ان في السقمونيا بالطبع، او معه، علة

مسهلة للصفراء»[١].

انصبت جهود «الاسس المنطقية للاستقراء» على اثبات ان القاعدة التي تقول: «الاتفاق لايكون اكثريا او دائماً» ليست قاعدة عقلية اوليه ثابتة قبل التجربة والاستقراء، بل هي بنفسها قاعدة تجريبية تقوم على اساس الاستقراء، ومن هنا لايصح الركون اليها لإثبات اليقين بالتعميم الاستقرائي.

واخيراً يحسن بنا ان نشير الى النقاط التالية:

* اتضح لنا في ضوء استعراض موقف ارسطو من الاستقراء الناقص ان المعلم الاول في «المنطق» لم يضع الاستقراء الناقص في صياغته النهائية، التي وجدناها في منطق الشفاء. ولكن «ابن سينا» لم يأت بجديد، انما نظّم البحث في هذا الموضوع، حيث جاء ذكر «التجربة» وطريقة تحويل الاستقراء الناقص الى قياس، اعتماداً على القاعدة العقلية «الاتفاق لا يكون دائماً او اكثرياً»، لدى ارسطو في الطبيعيات، كما تقدم ذكره.

* * اثار «ابن» سينا بعض الاشكالات حول مفهوم «التجربة» واليقين التجريبي. وقدّم اجابات، تمثل ايضاحات في غاية الاهمية. وهنا يحسن بنا الوقوف على هذه الايضاحات، حيث نرفع ما اثاره بعض الباحثين من ايهام وخلط:

---

(١) منطق الشفاء، ج٣، ص ٩٥.

اليقين التجريبي عند ابن سينا:

نبدأ اولاً بتقرير ما اثاره ابن سينا من اعتراضات واجابات، ثم نعود الى استخلاص النتائج:

«ما بال التجربة توقع في اشياء حكماً يقينياً؟ ثم لو توهمنا ان لا، ناس الا في بلاد السودان، ولا يتكرر على الحس انسان الا اسود، فهل يوجب ذلك ان يقع اعتقاد بان كل انسان اسود؟ فان لم يوقع، فلِمَ صار تكرر يوقع وتكرر لا يوقع؟ وان اوقعت فقد اوقعت خطأً وكذبا. واذا اوقعت خطأً وكذبا فقد صارت التجربة غير موثوق بها ولا صالحة ان تكتسب منها مبادىء البرهان: فنقول في جواب ذلك:

ان التجربة ليست تفيد العلم لكثرة ما يشاهد على ذلك الحكم فقط، بل لاقتران قياس به قد ذكرناه. ومع ذلك فليس تفيد علماً كلياً قياسياً مطلقاً، بل كليا بشرط، وهو ان هذا الشيء الذي تكرر على الحس تلزم طباعه في الناحية التي تكرر الحس بها امراً دائماً، الا ان يكون مانع فيكون كلياً بهذا الشرط لا كلياً مطلقاً»[1].

في هذا الضوء يتضح ان اليقين التجريبي ـ عند ابن سينا ـ يقين يقتصر على الموضوع التجريبي، اي ان الحكم في القضية التجريبية ينصب على الموضوع المجرب، ولا يصح ان يتعداه لما هو اعم منه او اخص ؛ وبهذا يتضح:

«ان الولادة اذا أخذت من حيث هي ولادة عن ناس سود، او عن

---

(١) منطق الشفاء، ج٣، ص ٩٦.

ناس في بلاد كذا، صحت منه التجربة. واما اذا اخذت من حيث هي ولادة عن ناس فقط، فليست التجربة متأتية باعتبار الجزئيات المذكورة، اذ التجربة كانت في ناس سود، والناس المطلقون غير الناس السود. ولهذا فان التجربة كثيراً ما تغلط ايضاً اذا أخذ ما بالعرض مكان ما بالذات فتوقع ظناً ليس يقيناً. وانما يوقع اليقين منها ما اتفق أن كان تجربة وأخذ فيها الشيء المجرب عليه بذاته. فاما اذا أخذ غيره مما هو اعم منه او اخص، فان التجربة لا تفيد اليقين»[1].

لكنني لم افهم الوجه في تعميم الشرط «اخذما بالعرض» الى حالة اخذنا الاخص، علماً ان «ابن سينا» يركز في الفقرة اللاحقة من البحث على ايضاح امتناع اليقين التجريبي في حالة اخذ العام بدل الخاص، اي ان ينصب الحكم على الاعم من المجرب:

«ولسنا نقول أن التجربة امان عن الغلط وانها موقعة لليقين دائماً. وكيف والقياس ايضا ليس كذلك! بل نقول ان كثيراً ما يعرض لنا اليقين عن التجربة فيطلب وجه ايقاع ما يوقع منها اليقين. وهذا يكون اذا أمنا ان يكون هناك اخذ الشيء بالعرض، وذلك ان تكون اوصاف الشيء معلومة لنا، ثم كان يوجد دائماً او في الاكثر بوجوده امر، فاذا لم يوجد هو لم يوجد ذلك الامر. فان كان ذلك عن وصف عام فالشيء بوصفه العام مقارن للخاص. فالوصف الخاص مقارن للحكم. وان كان لوصف خاص بل اخص من الطبيعة التي للشيء، فذلك الوصف الخاص عسى ان يكون هو الذي تكرر علينا فيما امتحنا وفي اكثر الموجود

(١) نفس المصدر، ص ٩٦.

من الشيء عندنا، فيكون ذلك مما يهدم الكلية المطلقة ويجعلها كلية ما اخص من كلية الشيء المطلقة، ويكون ذلك مغلطاً لنا في التجربة من جهة حكمنا الكلي: فان في مثل ذلك، وان كان لنا يقين بان شيئاً هو كذا يفعل امراً هو كذا، فلا يكون لنا يقين بان كل ما يوصف بذلك الشيء يفعل ذلك الامر: فانا ايضاً لا نمنع ان سقمونيا في بعض البلاد يقارنه مزاج وخاصية او يعدم فيه مزاج وخاصية لا يسهل. بل يجب ان يكون الحكم التجريبي عندنا هو السقمونيا المتعارف عندنا، المحسوس، هو لذاته او طبع فيه يسهل الصفراء الا ان يقاوم بمانع. وكذلك حال الزمرد في اعمائه الحية»[1].

على هدي النصوص المتقدمة نستطيع تلخيص الموقف السينوي من اليقين التجريبي فيما يلي:

١ـ ان الشرط المنطقي لحصول اليقين التجريبي هو ان ينصب الحكم على الموضوع المجرب بذاته، ولا يتعداه لما هو اعم منه، وهذا هو معنى تجنب «اخذ ما بالعرض بدل ما بالذات».

٢ـ ان «اخذ ما بالعرض بدل ما بالذات» وتعميم الحكم في القضية التجريبية يحولها من قضية يقينية الى قضية ظنية.

٣ـ ان مثال «سقمونيا في بعض البلاد» الذي ضربه ابن سينا في النص الاخير يؤكد ان مجرد احتمال وجود خصوصية مؤثرة على تعطيل فاعلية العلة كافٍ لتعطيل افادة اليقين من مجرد تكرار المشاهدة.

وعلى هذا الاساس سوف يكون اليقين التجريبي مقيداً دائماً بشرط عزيز الوقوع إن لم يكن مستحيلاً. على ان نشير الى ان هناك مجالاً كبيراً

---

(١) المصدر نفسه، ص ٩٧.

للبحث مع «ابن سينـا» في ضوء نصـوصه المتقدمة، لا تسعه دائرة بحثنا الحاضر. انما نؤكد على ان الهدف من اثارة البحث حول «اليقين التجريبي عند ابن سينا» هو ازالة الابهام الذي يسببه الخلط بين موقف ابن سينا في شروط الاستنباط التجريبي، وموقف مناطقة الاستقراء المعاصر في شروط الاستنباط التجريبي. حيث يبحث الاول عن اليقين في اطار المنطق العقلي، بينا يدرس الموقف الثاني مبررات الاحتمال في اطار المنطق الاستقرائي الذي المعاصر.

وقبل الانتقال الى الفقرة اللاحقة في هذا الفصل لا بد ان نقف على انجازات علماء وفلاسفة العلم المسلمين، وما قدموه لحضارة البشر في هذا المضمار:

دأب مؤرخو الفلسفة والحضارة في العالم الغربي وتابعهم تلامذتهم على اغفـال الدور الكبير، الذي لعبه علماء المسلمين في استخدام المنهج الاستقرائي، وتنظيم التجربة ووضع شروطها، فذهب جل هؤلاء الى وسم الـتراث الاسلامي كله بسمة التجريد ومجافاة التجريب والاستقراء. بل هناك من اسرف، فحاول تبرأة ساحة ارسطو من ارسطيته، وحمّل العرب مسؤولية ما سُجل على ارسطو من ملاحظات:

«ولم يزعم بيكون انه اكتشف الاستقراء، وعرف أن اناساً كثيرين مارسوه من قبل. ولم يكن اول من «أطاح» بارسطو. فان رجالاً مثل روجر بيكون، وبتروس راموس، فعلا هذا لعدة قرون خلت. ولكن ارسطو الذي اطاحوا به (كما تحقق بيكون احيانا) لم يكن ارسطو الاغريق الذي كان كثيراً ما استخدم وامتدح الاستقراء والتجريب، ولكن ارسطو الفيلسوف

الذي صنعه العرب واتباع الفلسفة السكولاستية»[1].

لا اجد ضرورة الى مناقشة هذا النص، الذي اضحىٰ بفضل الدراسات العلمية الكثيرة وهماً لا طائل من ورائه. انما نشير هنا الى الموقف المعاصر في دراسات الباحثين العرب والمسلمين، حيث كرّس فريقٌ كبير منهم الجهد: لالقاء الضوء على اسلوب العلماء المسلمين الاوائل في دراسة الطبيعة وفي بحوثهم الفقهية. وقد اثبتت دراسات عديدة ـ وهي على صواب في الاستنتاج ـ استخدام علماء المسلمين للمنهج الاستقرائي في دراساتهم الطبيعيةوبحوثهم الانسانية، وبهذا سبقوا علماء الغرب، بل كانوا الاساس الذي استلهمه علماء عصرالنهضة الاوربية، فيما حققوه من انجازات على مستوىٰ العلم ومنهجه. ورغم تقديرنا لجهد باحثينا ـ خصوصاً في اعانتهم الانسانية على استبصار سبيلها الحق المجافي لروح العنصرية فيما قدموه من دلائل قاطعة على عدم وجود اي تفوق دموي بين عناصر البشر وقومياتهم المختلفة ـ نلاحظ على هذا النحو من الدراسات (مسجلين ما نلاحظ بايجاز تام) ما يلي:

اذ نسلم بالاثر الكبير لعلماء المسلمين وفلاسفتهم على الحضارة الحديثة بما قدموه من انجازاتٍ على مستوىٰ مادة العلوم الاساسية من فلك وفيزياء وكيمياء وفقه.... وعلى مستوىٰ منهج البحث في هذه العلوم، حيث تنبهوا الى تنظيم التجربة والاستقراء، واستخدام المنهج الاستقرائي في مجالاته. اذ نسلم بكل هذا نجد ان المنهج ـ سواء أكان استنباطاً ام استقراءً ـ كائن حي ينمو ويتطور تبعاً لتطورات الفكر البشري، وعلى وجه التحديد

---

(١) قصة الحضارة، ول ديورانت، المجلد ١٤، ج٢٨، ص ٢٧١.

تبعاً لتطور المعرفة العلمية ذاتها. فمناهج البحث العلمي ليست صياغات ازلية لا يعتريها التغيير ولا يطرأ عليها التبدل.

خذ المنهج الاستنباطي مثلاً، تلاحظ التطورات العظيمة، التي طرأت على هيكل ومفردات هذا المنهج منذ ارسطو حتى يومنا الحاضر. فالمنطق الرياضي الحديث ـ الذي يمثل في تطوراته المختلفة تطوراً للمنهج الاستنباطي والمنطق الصوري، الذي وضعه ارسطو ـ وليد التطورات التي طرأت على علم الرياضة، وتطور البحث الرياضي يرتبط بشكل اكيد بتطور البحث في العلوم الطبيعية ارتباطاً، كان التأثير فيه متبادلاً. او خذ الاستنباط لدى فقهاء الشريعة، فسوف تجد ان البحث في علم اصول الفقه اصطنع في اطار المنطق الصوري صوراً من القواعد والاصول المتطورة، تبعاً لمراحل تطور البحث في علم الاصول، وقد ارتهن تطور البحث في علم الاصول بشكل مباشر بتطور البحث الفقهي، فكلما اختلفت رؤية الفقه اختلف معها المنطق المستخدم لتنظيم قواعد الاستنباط الفقهي. ومن الواضح ان تطور البحث في علوم الشريعة ـ والفقه على الخصوص ـ يرتبط ارتباطاً اكيداً بتطورات الحياة ومستجداتها.

اما المنهج الاستقرائي الذي يمثل الاداة الرئيسية الثانية في العلوم فهو كاخيه «الاستنباط»، ودراستنا هذه تقدم الشواهد الكثيرة على نمو هذا المنهج وتطوره.

تأسيساً على هذا الفهم لمناهج البحث، تكون المهمة الرئيسية لباحثينا هي متابعة المنهج الاستقرائي في تطوراته الراهنة ومآله الحاضر. اي

ان الجهد يجب ان يكرس لمعرفة واقع ما انتهى اليه العقل البشري في بلورة وتنقيح المنهج الاستقرائي، والاكتفاء بدراسة او بضع دراسات لتثبيت الحق التأريخي وتسجيل فضل السبق!

•

* * *

«٣»

الاستقراء منذ النهضة الاوربية الحديثة

•

يتفق مؤرخو الحضارة والفلسفة الغربية على ان «فرنسيس بيكون» (١٥٦١ ـ ١٦٢٦) هو مؤسس المنهج الاستقرائي. وان «جون ستيوارت مل (١٨٠٦ ـ ١٨٧٣) نسج على منواله. كما يؤكد الاعتقاد السائد بينهم على ان «دافيد هيوم» (١٧١١ ـ ١٧٧٦) الذي يشكل منعطفاً في تاريخ فلسفة الغرب الحديث، يمثل ايضاً حداً فاصلاً في تاريخ المنهج الاستقرائي بين سابقيه وتابعيه.

وقبل ان امضي مع سياق التأريخ، واقرأ «بيكون ومل»، واعيد قراءة «دافيد هيوم»، فارسم الصور المنطقية التي ركبّها رجال الحكمة الغربية للاسقراء قبل «نظرية الاحتمال»، يحسن بنا ان نطل على الصورة الحضارية للاستقراء منذ عصر النهضة الاوربية حتى يومنا الحاضر، لكي أميط اللثام عن اكذوبة:

القراءة السطحية والمتابعة المجهول لما ورد لنا من ثقافة غربية ادت الى فضائح ثقافية، وكانت منها اكذوبتان، كشفنا اللثام عن الاولى في دراسة سابقة عن الفكر الوجودي، حيث ترسخ في اذهان الوسط العام لقراءنا ومثقفينا (ان جاز الاطلاق) ان الوجودية تعادل الالحاد، وان الوجودية تعني اللاإيمان.وقد اوضحنا ان الوجودية في تكوينها نقلة ثقافية ترتبط بتفاعلات الفكر الاوربي المعاصر، ولا يشكل الالحاد محوراً لهذا الفكر، بل هناك كبار بين الفلاسفة الوجوديين ممن يتعصب بحماس للايمان بالله.

اما الاكذوبة التي نريد قبرها هنا فهي ترتبط بالمعادلة التي تساوي بين المنهـج الاستقرائي والمذهب التجريبي. وعبر قراءة متفحصة لتاريخ حضارة الغرب الحديثة نلاحظ: ان التجريبية كاتجاه معرفي لم يكن اساساً لايٍّ من التطورات الخطيرة، التي لعبت دوراً رئيساً في تقرير مصير النهضة العلمية والحضارية المعاصرة. وهذه الحقيقه يمكن التأكد منها ببساطة، عبر مراجعة سريعة لقائمة رجال الابداع العلمي الحديث واتجاهاتهم المعرفية.

ان الدعوة الى اكتشاف اسرار الكون والطبيعة، وتسخير الامكانات الهـائلة التي اودعها الخالق في الوجود المادي، تتطلب دون شك استقراءً وتجـريبـاً، كما ان اكتشـاف القوانين العامة التي تحكم الاشياء لايتسنىٰ بالقياس والاستنباط وحـده، بل لا بد من الاستقـراء ومتابعة الجزئيات للانتقـال الى القـانـون العـام. ولكن هذا كله لا يعني الايمان بالمـذهب التجريبي، واقامة المعرفة البشرية كلها على اساس الحس والتجربة.

ان رفـع شعار التجريب والاهتمام بالمعرفة الاستقرائية في العصر الاوربي الحديث جاء نتيجة الثورة، التي فجّرها عصر النهضة في مواجهة العقل الاوربي ابان العصر الوسيط، الموغل في التجريد، ومجافاة الحس، وفي مواجهة روح العصر الوسيط، الذي لم يبرح التأكيد على الغاء دور الجانب المادي من حياة البشر.

نعود لدراسة المنهج الاستقرائي لدىٰ «بيكون ومل»، ثم نتناول الاستقراء عند دافيد هيوم، ليتسنىٰ لنا الوقوف على وضع الاستقراء في ضوء التطورات المعاصرة.

أـ الاستقراء بين «بيكون ومل»:

يشكل «فرنسيس بيكون» منعطفاً ـ كما يؤكد مؤرخو حكمة الغرب ـ في تاريخ المنطق والفلسفة الغربيين. لقد انقضَّ على تراث الغرب «ارسطو ومدرسته» فلم يبقِ لمنطق ارسطو حسنةً تذكر. عاب على ارسطو قياسه مؤكداً ان الطريقة الاستنباطية بعامة ليست طريقاً يمكن ان يستعين به العلم على اكتشاف اسرار الطبيعة. كما عاب على ارسطو نظريته في الاستقراء! وتأسيساً على موقف «فرنسيس بيكون» من الاستنباط سُجل عيه الاعتراض التالي:

«ولم يكن «بيكون» يزدري القياس فقط، بل كان يحط ايضاً من قدر الرياضيات، بزعم كونها غير كافية من الناحية التجريبيه. وكان معاديا بقسوة لارسطو.....

ان الدور الذي يلعبه الاستنباط في العلم اعظم مما ظن «بيكون» ففي كثير من الاحيان حين يتعين اختبار فرض، فثمة رحلة استنباطية طويلة من الفرض الى نتيجة ما يمكن اختبارها بالملاحظة. وعادة ما يكون الاستنباط رياضيا، وفي هذا الصدد يبخس «بيكون» اهمية الرياضيات في البحث العلمي»[1].

يهمنا هنا ان نقف على «بيكون» ومعالجته لنظرية الاستقراء. لاحظ «بيكون» ان الاستقراء عند ارسطو يقوم على اساس ما يسميه «الاستقراء بالعد البسيط»، وعلى اساس هذا الفهم هاجم الاستقراء الارسطي، واقترح

---

(١) تاريخ الفلسفة الغربية، راسل، ص ٨٣ ـ ٨٥.

طريقة جديدة لوضع افضل للاستقراء: «ان النقيصة الرئيسية في المنهج الارسطي ـ فيما رأى بيكُن ـ انه اعتمد في الوصول الى قوانين الطبيعة على طريقه الاحصاء البسيط للامثلة الجزئية، اي انه اكتفى بذكر عدد من الامثلة الجزئية التي تؤيد القانون الذي يصل اليه، فلا هي اتسعت حتى شملت مجال البحث كله، ولا هي دلت على موضع الضرورة التي تجعل من القانون الطبيعي حكمًا عاما ينطبق في كل الظروف»[1].

ونحن هنا في غنى عن التعليق على اتهام بيكون لارسطو، بعد ان كشفنا النقاب في السالف من صفحات هذا الفصل عن القسوة والارتجال في موقف العداء من المعلم الاول.

على اي حال لنــرَ ما هو الاستقراء عند «بيكون»؟

لاحظ «فـرنسيس بيكون» ان اكتشاف قوانين العلم لايتم جراء حشد الامثلة الجزئية ومجرد احصاء الحالات الايجابيه التي تقع فيها الظاهره. انما يمثل حصول الظاهرة «الحضور» المرحلة الاولى من مراحل سير المنهج الاستقرائي. «ويتألف هذا المنهج من تجميع الوقائع وتناولها على نحو معين: افرض اننا نبحث عن علة الحرارة، علينا اولاً ان نرتب قائمة «للحضور» بحيث تحتوي جميع الامثلة المعروفة التي توجد فيها ظاهره الحرارة: ثم علينا ان نضع قائمة «للغياب» ندرج فيها من الحالات الجزئية ما يقابل تلك الحالات التي وضعناها في قائمة الحضور، ولكن تختلف عنها من حيث ان الطبيعة البسيطة، اي الحرارة، معدومة فيها؛ وعلينا ايضاً ان نرتب قائمة

---

(١) المنطق الوضعي، د ـ زكي نجيب محمود، ج٢، ص ١٨٨.

«للتفاوت في الدرجة» تحتوي على الحالات التي توجد فيها الحرارة على درجات متفاوتة. وقد نستطيع بفحص القوائم ان نجد طبيعة مولدة تتمشى مع النتيجه او الطبيعة المتولدة حضوراً وغيابا وتفاوتاً في الدرجة فيمكننا حينئذ ان نضع تفسيراً او «نتيجة مبدئية» فنرى على سبيل المثال ـ ان الحركة هي علة الحرارة او «صورتها»[1].

بهذه الخطوات الثلاث يسير الدليل الاستقرائي؛ ليصل في نهاية المطاف الى القانون العلمي. ومن الواضح ان «بيكون» يبحث في خطواته عن تحديد العلة التي تقرر حصول الظاهرة، ومن ثمّ فالقانون العلمي عند «بيكون» ومنهج العلم يفترض سلفاً «مبدأ العلية» كمبدأ كلي عام يحكم الطبيعة بالضرورة.

واهم نقد يوجه الى الاستقراء البيكوني هو عدم امكانية حصر العلل التي تخلق الظاهرة حصراً يقينياً شاملاً، ومن ثمّ لا يمكن ان نرتفع بالاستنتاج الاستقرائي الى مستوى القانون الضروري العام، كما اراد بيكون، بل غاية ما توفره لنا خطوات البحث الاستقرائي هو رفع قيمة احتمال التعميم.

اما «جون ستيوارت مل» فهو لم يبتكر شيئاً اساسياً في معالجته قياساً بما صنعه سلفه «بيكون»، بل جارى بيكون في وضع طرائق ـ اكثر دقةً ـ للبحث عن العلة، وافتراض العلية مبدأ للاستقراء، ولم يختلف عنه في توكيد «اليقين» كنتيجة للدليل الاستقرائي. انما الجديد في موقف «مل» هو القاعدة التي انطلق منها في مجال نظرية المعرفة.

---

(١) الموسوعة الفلسفية المختصرة، ص ١٤٨.

لقد كان «جون ستيوارت مل» فيلسوفاً تجريبياً، اي انه يؤمن بان المعرفه البشريه باسرها ترتد الى قواعد تجريبية ومباديء حسية. ومن ثمّ تحتم عليه ان يحدد لنا طبيعة «مبدأ العلية»، الذي يتخذ منه منطلقاً لتفسير الاستقراء! ولم يكن امامه الا ان يرد العليه الى اسس استقرائية. فذهب الى ان «مبدأ العلية» بل كل المباديء التي نحسب انها مباديء عقلية ترتد في الـواقـع الى استقراء للطبيعة. فنحن نعتقد ان المعلول يتبع العلة، لاننا لاحظنا اطراد ذلك في عالم الطبيعة.

لم يرضِ موقف «مل» حتىٰ التجريبيين، فكيف ساغ له ان يبحث عن العلة بوصفها علاقه ضروريه بين الاشياء في طرقه الاستقرائية، على اساس مبدأ العلية الذي يفترضه معرفة استقرائية، ومثل هذه المعرفة لاتتيح له اثبات الضرورة. وحينئذٍ يرجع بنا الى ما قبل «بيكون» اي اقامة المعرفه الاستقرائية على اساس «الاحصاء بالعد البسيط».

ب ـ الاستقراء لدى «دافيد هيوم»:

لعل اجمل صورة لفلسفه «هيوم» هي تلك التي استدعاها الفيلسوف الانجليزي «برتراندراسل»: «دافيد هيوم David Hume احد اهم الفلاسفة (١٧١١ ـ ١٧٧٦) لانه وصل بفلسفة «لوك» و «باركلي» التجريبية الى نتيجتها المنطقية، واذ جعلها متسقة مع ذاتها جعلها غير قابلة للتصديق. وهو يمثل بمعنى معين نهاية ميتة: ففي اتجاهه من المستحيل المضي الى ابعد مما وصل اليه»[١].

---

(١) تاريخ الفلسفة الغربية، ص ٢٥١.

اما موقف «هيوم» من الاستقراء فيتحدد في ضوء موقفه من مبدأ الاستقـراء «العلية». فقد كان «هيوم» مؤمناً ـ كما يؤمن راسل وكثير من مناطقة الاستقراء ـ ان «العلية وحدها هي التي تمكننا من ان نستدل الى شيء ما او حادثة ما من شيء آخر او حادثة اخرى: «انها العلية فقط التي تولد مثل هذا الارتباط، بحيث تزودنا بتأكيد من وجود او فعل موضوع، على انه يتبع أو يسبق بوجود آخر او فعل آخر»[١].

من هنـا تنشـأ مشكلة الاستقراء الكبرى في فلسفة هيوم، بل في الفلسفـة الحـديثـة بدءً بدافيد هيوم. حيث ان الفلسفة قبل هيوم كانت تفترض ان العلية (الارتباط الضروري بين العلة والمعلول)مدرك بديهي بقوة الحدس العقلي، ومن ثم تضمن للاستقراء منطلقه الاساس. اما هيوم فقد انكر وجود اي ارتباط ضروري بين العلة والمعلول في عالم الواقع. اي ان الارتباط الضروري ـ لدى هيوم ـ ليس مدركاً حدسياً، لان انكار هذا الارتبـاط لا يتضمن اي تنـاقض منطقي، والتجربة لا تزودنا باكثر من الاقتران المطرد بين العلة والمعلول في عالم الخارج، فليست هناك علاقة بين العلة والمعلول اللهم الا الاقتران والتعاقب المطرد.

ولكن كيف يفسر لنا «هيوم» الارتباط الضروري الذي يبدو لنا بين العلةوالمعلول؟

«يكرر «هيوم» عدة مرات رأيه الذي يناضل من اجله ويجادل الا وهـو ان ما يظهر لنا كارتبـاط ضروري بين الموضوعات هو في الواقع ارتباط فقط بين افكـار تـلك الموضوعات: ان العادة تهيىء الذهن و «ان

(١) المصدر السابق. ص ٢٥٨.

هذا الانطباع او التهيؤ، هو الذي يزودني بفكرة الضرورة». ان تكرار الامثلة الذي يقودنا الى الاعتقاد بان (أ) تسبب (ب)، لا يعطينا اي جديد في الموضوع، ولكن في الذهن يقود الى التداعي بين الافكار، وعلى ذلك «فالضرورة هي شيء يوجد في الذهن لا في الموضوعات»[1].

اذن! فالعلية كعلاقة موضوعية ضرورية قائمة بين لونين من الاحداث لا سبيل لها حدساً او تجربة، انما يمكن اكتشاف هذه العلاقة الضرورية في ضوء قانون تداعي المعاني والعادة الذهنية.

ويؤكد «هيوم» ان الارتباط المتكرر بين (أ) و (ب) لا يشكل مبرراً منطقياً لتوقعهما مرتبطين في المستقبل، وانما هو فقط علة هذا التوقع: «ان التكرار لا يكشف البتة اي شيء في الموضوعات ولا يسبب اي شيء فيها، ولكن له نفوذ فقط على الذهن، بذلك الانتقال المعتاد الذي يولده: ان هذا الانتقال المعتاد هو من ثم مثيل للقوة وللضرورة، اللتين تشعر بهما النفس، ولا يدرك ادراكاً خارجياً في الاجسام»[2].

وبهذا نصل مع «هيوم» الى الايمان بأن الاستدلال الاستقرائي له مبرره السيكولوجي فحسب، اي ليس لدينا مبرر موضوعي لافتراض تمدد الحديد بالحرارة كقانون، او كحدث سيقع في المستقبل، انما لدينا مبرر نفسي فحسب. وهذا يعني ان هيوم وضع الاستقراء امام مشكلته الرئيسية.

ويحسن بنا ان نختم هذا البحث بمناقشة ممتعة اثارها «راسل» ضد «هيوم»:

---

(١) المصدر السابق، ص ٢٦٠ ـ ٢٦١.

(٢) المصدر السابق، ص ٢٦٤. نقلاً عن هيوم.

«الحقيقة هي انه، حيثما كان الامر متصلاً بعلم النفس، يبيح «هيوم» لنفسه ان يعتقد في العلية بمعنى يدينه هو بوجه عام . فلنأخذ مثلاً شاهداً على ذلك: انا ارى تفاحة، واتوقع انني اذا اكلتها سأجرب نوعاً معيناً من الطعم. فتبعاً لهيوم ليس هناك سبب لكوني أجرب هذا النوع من الطعم: ان قانون العادة يفسر وجود توقعي انا، ولكنه لا يبرره. بَيْدَ ان قانون العادة هو نفسه قانون عليّ. من ثمّ لو اخذنا «هيوم» مأخذ جدٍ للزم ان نقول: بالرغم من ان منظر التفاحة في الماضي كان مقترنا بتوقع معين من الطعم، فليس ثمة سبب ينبغي معه ان يستمر اقتران هذا المنظر بذاك التوقع، فربما حين ارى في المرة القادمة تفاحة سأتوقع ان يكون لها طعم مشابه لطعم لحم البقر المشوي. وفي وسعك، في هذه اللحظة ان تظن الامر على غير هذا الوجه، ولكن ليس هذا سببا لتوقع كونك ستظنه على غير هذا الوجه بعد خمس دقائق. فلو كانت نظرية هيوم الموضوعية صحيحة، فليس لدينا سبب افضل لتوقعات في علم النفس منه لتوقعات في العالم المادي»[1].

* * *

---

(١) المصدر السابق، ص ٢٦٢.

الفصل الثاني

نظرية الاحتمال «١»

١ـ مفهوم الاحتمال.

٢ـ حساب الاحتمالات.

٣ـ تفسير الاحتمال.

١ـ مفهوم الاحتمال

يتكرر في الاستعمالات اليومية مصطلح «الاحتمال»، فيقال: أحتملُ كذا، ومن المحتمل أن يكون كذا، والأمر «س» لايتعدى كونه أحتمالاً... فماذا يُراد بـ «الاحتمال» في هذه الاستعمالات ؟

هناك دلالات مختلفة لـ «الاحتمال»:

أـ لاحظ الجمل التالية: «أنا على يقين بأن هناك حياة في المريخ».

«ليست هناك حياة في المريخ».

فالجملة الاولى تشير الى ان الحياة في المريخ واقعة مؤكدة، بينما تشير الجملة الثانية الى أن الحياة على المريخ ليست امراً واقعاً، بل نستطيع أن تنفيها بأطمئنان. والذي يتبنى الجملة الاولى لا بد أن تكون لديه من الشواهد والادلة الكافية لأثبات قيام الحياة في المريخ بشكل مؤكد وقاطع. أما الذي يتبنى الجملة الثانية فلابد ان تكون لديه شواهد وأدلة كافية تنفي بحسم قيام الحياة في المريخ.

أما بالنسبة لي، حيث لا أمتلك شواهد كافية تسمح لي بالجزم في وجود الحياة على سطح كوكب المريخ، كما لا أمتلك شواهد كافية تتيح لي القطع واليقين بعدم وجود حياة على المريخ، فأقول: «إن الحياة على المريخ أمرٌ محتمل».

نلاحظ هنا أن الأحتمال في قولي:إن الحياة على المريخ أمرٌ محتمل».

يمكن أن نضعه في الصيغة التالية ونقول:

«أن أحتمال الحياة على المريخ يساوي $\frac{٥٠}{١٠٠}$ «٥٠ ٪» ».

ونحن هنا نعطي الاحتمال قيمة $\frac{1}{2}$ باعتبار جهلنا وعدم أطلاعنا على حقيقةِ الأمر، وما يدل غليه من دلائل وشواهد.

ب ـ لو أخبرنا مخبر ان جو مدينة البصرة اليوم «وكان اليوم منتصف شهـر تموز» ممطر وأن درجة حرارتها كانت «٣٠°»، فيا تُرى ماذا سيكون موقفنا من هذا النبأ ؟ هل نستطيع أن نصدقه ؟ هل نستطيع أن نجزم بكذبه ؟

أننا بحكم معلوماتنا السابقة عن مناخ مدينة البصرة، حيث يمتلك كل واحد منا شواهد وادلة على أن درجة حرارة مدينة البصرة في شهر تموز لا تقل عن «٤٠°» ، كما يعرف الجميع أن مدينة البصرة لا يعرضها عادةً جو ممطر في فصل الصيف، خصوصاً في شهر تموز.

إننا بحكم هذه المعلومات لا نستطيع ان نجزم بصحة خبر المخبر، بل إن هذه المعلومات تجعلنا نستبعد هطول المطر وبلوغ الحرارة درجة «٣٠°» في مدينة البصرة. ولكن رغم ان هذه المعلومات تجعلنا نستبعد وقوع الحدث، ولا تسمح لنا بتصديق النبأ، الا انها لا تسمح لنا ايضاً بالجزم واليقين بكذب الخبر والقطع بعدم وقوع الحدث، خصوصاً إذا كان المخبر ثقة. فمهما بلغت الشواهد وتراكمت الادلة لدينا يبقى احتمال وقوع الحدث قائما، رغم كون هذا الاحتمال ضعيفاً.

ولو اردنا أن نصوغ الجملة صياغة اخرى فنقول:

«ان احتمال هطول المطر وبلوغ درجة الحرارة «٣٠°» منتصف شهر تموز في مدينة البصرة هو اقل بكثير من $\frac{1}{2}$ ».

ج ـ أخترنا ألف مدخن بشكلٍ عشوائي، فوجدنا بعد الفحص المختبري الدقيق أن واحداً من هذه المجموعة المكونة من «١٠٠٠» مصاب

بمـرض السـرطان، ثم اجرينا فحصاً آخر على مجموعة ثانية مؤلفة من «١٠٠٠» مدخن ايضـاً، فوجـدنـا أن ثلاثـة من الألف مصابون بمرض السـرطـان، ثم أجرينا اختباراً ثالثاً فوجدنا أن أثنين من الألف الثالث مصـابون بمرض السرطان. وبعد تجارب كثيرة وجدنا ان نسبة الاصابة بالسرطان بين كل ألف مدخن تتراوح بين ١ــ٣،حينئذ نستطيع القول: ان احتمال اصابة المدخن بالسرطان تساوي $\frac{٢}{١٠٠٠}$ = ٢٠٠ر٠.

والاحتـمال بهذا المعنى يعني نسبة تكرار وقوع الحدث من خلال الـواقـع التجريبي. فمن خلال التجارب المتعددة أستطعنا أقتناص هذه النسبة وتحديدها بشكل رياضي.

* * *

٢ـ حساب الاحتمال

مثال «١»: إذا كانت لدينا عشر كرات مرقمة من ١ ــ ١٠، موضوعة في صندوق، وأردنا أن نسحب منها كرة واحدة، فما هي قيمة إحتمال أن تخرج الكرة، وهي تحمل عدداً فردياً ؟

نُلاحظ هنا أن قيمة أحتمال أن تخرج الكرة التي تحمل رقم «١» يساوي $\frac{١}{١٠}$ ، وأحتمال أن تخرج الكرة التي تحمل رقم «٢» يساوي $\frac{١}{١٠}$ ايضاً، وهكذا...

ونلاحظ ايضاًأن الكرات التي تحمل عدداً فردياً هي خمس كرات (١ ـ ٣ ـ ٥ ـ ٧ ـ ٩)، فدرجة احتمال أن تخرج احدى هذه الكرات الخمسة يساوي مجموع قيم احتمال كل عدد من الأعداد الفردية، أي:

$$\frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠} \text{ اي: } \frac{٥}{١٠}$$

مثال «٢»: هناك تسع أوراق مرقمة من ١ ــ ٩ وأردنا أن نسحب بشكل عشوائي ورقة واحدة من هذه الاوراق، فما هي درجة احتمال ان تخرج الورقة، التي تحمل عدداً فردياً من بين هذه الاوراق ؟

من الواضح ان عدد الاوراق التي تحمل عدداً فردياً هي خمس أوراق من بين الأوراق التسعة، فخروج العدد الفردي له خمس فرص من تسع فرص ممكنة.

وبعبارة أُخرى: أن احتمال خروج الورقة، وهي تحمل عدداً فردياً، يساوي حاصل جمع احتمال ان تخرج الورقة رقم «١»، والورقة رقم «٣»، والورقة رقم «٥»، والورقة رقم «٧»، والورقة رقم «٩».

وحيث أن أحتمال خروج ايّ من هذه الاوراق الخمسة يساوي $\frac{١}{٩}$،
اذن ! احتمال خروج الورقة، وهي تحمل عدداً فردياً يساوي $\frac{٥}{٩}$.

مثال «٣»: اذا أخبرنا «أ» برواية عن «ب» عن «ج» عن «د» وكنا على يقين بأن كل واحد من الرواة صادق فيما نقل، فسوف نسلّم ونصدّق بالرواية. ونستطيع القول أن الرواية صادقة ١٠٠٪ = $\frac{١}{١}$. ولو كان هناك شخص خامس يروي عن «أ» او يروي عنه «د»، وكنا على يقين ايضابصدقه فسوف لا يتغير حكمنا بصدق الرواية. ومهما كثرت الوسائط التي نتيقن بصدقها فسوف لا يتأثر ولا تتغير قناعتنا بصدق الرواية.

ولكن اذا كنا نحتمل صدق «أ» و «ب» و «ج»... بنسبة معينة، كأن يكون احتمال صدق الراوي $\frac{٣}{٤}$ فسوف ينخفض احتمال صدق الرواية كلما تعددت الوسائط وكثر الرواة. اي: ان احتمال صدق الرواية سوف لا يبقى على نسبة صدق الراوي الواحد $\frac{٣}{٤}$ بل سوف يقل احتمال صدق الرواية عن $\frac{٣}{٤}$ ، ويأخذ الاحتمال سيراً تنازليا كلما تعدد الرواة وكثرت الوسائط التي وصلتنا الرواية عن طريقهم.

أتضح لنا أننا أذا كنا على يقين بصدق الراوي «أ» و «ب» و «ج»... فسوف نكون أيضاً على يقين بصدق الرواية ويكون احتمال صدقها = «١» وهو رقم اليقين.

أما أذا كنا نحتمل صدق الراوي «أ» و «ب»، و «ج» بدرجة ($\frac{٣}{٤}$) فان الاحتمال ياخذ بالضعف كلما تعددت وكثرت وسائط النقل. فاذا كان الرواة ثلاثة فاحتمال صدق الرواية أكبر مما لو كان الرواة اربعة، واذا كانوا اربعة فالاحتمال أكبر مما لو كانوا خمسة، وهكذا...

وهنا نتساءل عن سر الفرق بين هاتين الحالتين، لماذا يبقى احتمال صدق الرواية «١» في المثال الاول بينما لا يبقى احتمال صدق الرواية ($\frac{٣}{٤}$) كما هو الحال في المثال الثاني؟

يرجع السر في هذه المسألة الى قاعدة حسابية تنطبق على المثالين، وهي التي تبقي احتمال الصدق في المثال الاول على ما هو عليه الراوي «١»، بينما تخفض احتمال الصدق على ما هو عليه في الراوي ($\frac{٣}{٤}$) في المثال الثاني.

فما هي هذه القاعدة الحسابية؟

القاعدة الحسابية تقول: اذا أردنا أن نقيس احتمال وقوع الحدث «أ» و «ب» معاً فعلينا أن نضربَ قيمة احتمال «أ» في قيمة احتمال «ب» على تقدير «أ».

نأتي على المثالين السابقين لنرى سر الفرق بينهما في ضوء تطبيق القاعدة الحسابية عليهما.

نلاحظ أن صدق الرواية يعني صدق الرواة معاً. فاحتمال أن تصدق الرواية يعني احتمال اجتماع صدق الرواة معاً.

فاذا كنا نحتمل أن تصدق الرواية في المثال الاول فهذا يعني اننا نحتمل صدق «أ» و «ب» و «ج» و «د» مجتمعين.

وحينما نُطبّق القاعدة الحسابية على هذا المثال نجد أن احتمال صدق الرواية يساوي احتمال صدق «أ» مضروباً في أحتمال صدق «ب» على تقدير صدق «أ»، مضروباً في احتمال صدق «ج» على تقدير صدق «أ» و «ب» مضروباً في احتمال صدق «د» على تقدير صدق «أ»، و «ب»، و «ج».

وهذا يعني ان احتمال صدق الرواية في المثال الاول =

١×١×١×١=١.

واذا كان لدينا راوٍ خامس وسادس... نحتمل صدقهم ١٠٠٪. فهذا يعني اننا نبقى نضرب واحداً في واحد وتبقى النتيجة واحداً، (الذي هو رقم اليقين).

وحينما نطبّق القاعدة الحسابية على المثال الثاني، حيث كنا نحتمل صدق الراوي بدرجة $\frac{٣}{٤}$ فسوف تكون النتيجة كالتالي:

$$\frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٨١}{٢٥٦}$$

اي: اقل من $\frac{١}{٣}$

ومن هنا فكلما كثر عدد الوسائط انخفض احتمال صدق الرواية، ما دام احتمال صدق الراوي أقل من رقم اليقين «١».

وهذه القاعدة الحسابية تستند الى بديهية رياضية تُسمى بـ «بديهية الاتصال».

مثال «٤»: اذا كانت لدينا عشر كرات، خمس منها مصبوغ باللون الأخضر، وخمس منها مصبوغ باللون الأحمر وأردنا سحب كرتين من هذه الكرات فما هو احتمال أن تخرج الكرة الاولى والثانية وهما يحملان اللون الأحمر؟

حينما نُريد قياس أحتمال خروج الكرة الاولى حمراء والثانية حمراء فهذا يعني أن نطبّق القاعدة الحسابية المتقدمة «بديهية الاتصال»، فنضرب احتمال خروج الكرة الأُولى حمراء × احتمال خروج الثانية حمراء على تقدير خروج الاولى حمراء.

احتمال خروج الكرة الاولى وهي ملونة باللون الأحمر يساوي $\frac{٥}{١٠}$، لأن خمساً من الكرات العشرة ملوّن باللون الأحمر.

أما احتمال خروج الكرة الثانية وهي ملونة باللون الأحمر على تقدير خروج الاولى حمراء فهو يساوي $\frac{٤}{٩}$.

وقد يتسائل البعض عن السبب الذي جعل احتمال خروج الكرة الثانية مساوياً لـ « $\frac{٤}{٩}$ »؟

والسر في هذا الموضوع واضح، وذلك لاننا لا نريد أن نستخرج احتمال خروج الكرة الثانية حمراء قبل السحب، وبشكلٍ مطلق، بل نحن نريد أن نتعرف على قيمة احتمال خروج الكرة الثانية حمراء على تقدير خروج الاولى حمراء. وعلى تقدير خروج الكرة الاولى حمراء سوف تبقى لدينا ٤ كرات حمراء ضمن تسع كرات، خمسة منها خضراء وأربعة منها حمراء. فاحتمال خروج الكرة الثانية حمراء سوف يساوي $\frac{٤}{٩}$ (على تقدير خروج الاولى حمراء).

اذن احتمال خروج الكرة الاولى والثانية حمراء يساوي $\frac{٥}{١٠} \times \frac{٤}{٩} = \frac{٢٠}{٩٠} = \frac{٢}{٩}$

مثال «٥»: لنأخذ المثال السابق ونطرح على أنفسنا الاستفهام التالي:

ما هو احتمال ان تخرج واحدة من الكرتين وهي ملونة باللون الاحمر؟

والاجابة على هذا الاستفهام تتكفله قاعدة حسابية تُعرف ببديهية الانفصال، وتقول هذه البديهية «اذا أردنا أن نعرف قيمة احتمال حصول احدى حادثتين فعلينا أن نجمع قيمة احتمال الحادثة الاولى والحادثة الثانية، ونطرح منهما قيمة احتمال الحادثتين معاً».

نأتي هنا على تطبيق هذه القاعدة على المثال المتقدم، لقد كانت لدينا عشر كرات خمس منها ملون باللون الاحمر وخمس منها ملون باللون الأخضر، ونريد هنا ان نتعرف على قيمة خروج كرة واحدة حمراء في حالة سحب كرتين.

وفق القاعدة علينا أن نجمع احتمال خروج الكرة الاولى حمراء واحتمال خروج الكرة الثانية حمراء ونطرح من المجموع احتمال خروجهما معاً حمراوين.

احتمال خروج الكرة الاولى حمراء = $\frac{٥}{١٠}$.

احتمال خروج الكرة الثانية حمراى = $\frac{٥}{١٠}$.

احتمال خروجهما حمراوين = $\frac{٢}{٩}$ «وفقا لبديهية الاتصال. كما تقدم ايضاح هذه النسبة». اذن ! احتمال خروج احدى الكرتين حمراء = $\frac{٥}{١٠}$ + $\frac{٥}{١٠}$ - $\frac{٢}{٩}$ = $\frac{١٠}{١٠}$ - $\frac{٢}{٩}$ = $\frac{٩٠ - ٢٠}{٩٠}$ = $\frac{٧٠}{٩٠}$ = $\frac{٧}{٩}$

مثال «٦»: اذا كانت لدينا حقيبتان تحتوي الحقيبة الأُولى على ٥ كرات زرقاء وخمس كرات صفراء، وتحتوي الحقيبة الثانية على ٦ كرات زرقاء واربع كرات صفراء، وقمت بسحب كرتين واحدة من الحقيبة الاولى واخرى من الحقيبة الثانية، فما هي درجة احتمال ان تخرج احداهما زرقاء ؟

هذا المثال تطبيق لبديهية الانفصال أيضاً. ولا بد لنا وفق هذه البديهية من الجمع بين احتمال خروج الكرة الاولى من الحقيبة الاولى زرقاء واحتمال خروج الكرة الاولى من الحقيبة الثانية زرقاء، ونطرح من المجموع احتمال خروجهما زرقاوين معاً.

ملاحظة: نلاحظ اننا طبقنا بديهية الاتصال التي تقول «اذا أردنا معرفة قيمة احتمال حادثتين معاً (حادثة أ و حادثة ب) فاحتمالها معاً يساوي حاصل ضرب احتمال حادثة أ، ولنرمز له بـ ($\frac{أ}{ح}$) في احتمال حادثة ب، على تقدير وقوع أ، واذا رمزنا الى احتمال حادثة ب بـ ($\frac{ب}{ح}$)، فسوف نرمز الى احتمال حادثة ب على تقدير أ بـ ($\frac{ب}{ح.أ}$)».

نعم استخدمنا هذه البديهية في المثال الثالث والرابع، الا ان احتمال الحادثة على تقدير وقوع الاخرى في المثال الثالث ظل يساوي ($\frac{٣}{٤}$) وهو عين احتمال الحادثة المستقل، بينما كان احتمال الحادثة المستقل في المثال الرابع ($\frac{٥}{١٠}$).

الا أن احتمال الحادثة على تقدير وقوع الاخرى اصبح ($\frac{٤}{٩}$).

فما هو الفرق بين المثالين؟

يرجع الفرق بين المثالين الى الفرق بين الاحتمالات نفسها، فالاحتمالات على نوعين:

احتمالات مستقلة.

احتمالات مشروطة.

الاحتمالات المستقلة:

هي الاحتمالات التي لا تتأثر قيمتها على افتراض وقوع بعضها، كما هو الحال في المثال رقم (٣) فاحتمال صدق الراوي ووثاقته تقاس عادة بالنظر الى نفس الراوي، وما ورد بشأنه من تقييمات سجلها علماء الرجال بغض النظر عمن يروي عنهم. فاحتمال صدق الراوي رقم (٢) لا يتأثر

عادة بافتراض صدق الراوي الاول، فمجرد صدق الراوي الاول لا يؤدي الى زيادة وثاقة وصدق الراوي الثاني، كما لا يؤدي الى تضعيف درجة احتمال صدقه، وهناك مثال واضح ايضاً للاحتمالات المستقلة وهو مثال قذف قطعة النقد، فظهور الوجه او الكتابة احتمالان مستقلان.

الاحتمالات المشروطة:

هي الاحتمالات التي تتأثر قيمها على افتراض وقوع بعضها كما هو الحال في المثال رقم (٤)، حيث اننا اذا افترضنا خروج الكرة الاولى حمراء يبقى لدينا عندئذ اربع كرات حمراء من تسع كرات، فيكون احتمال خروج الثانية حمراء على افتراض خروج الاولى حمراء مساوياً لـ ($\frac{٤}{٩}$) بينما يمثل احتمال خروج الثانية حمراء ($\frac{٥}{١٠}$) اذا حسبناه بشكل مطلق، ودون افتراض خروج الاولى حمراء.

ولأجل تجلية هذا الموضوع بشكل اكبر نضرب مثلاً آخر للاحتمالات المشروطة وهو:

اذا كان لدينا (١٢) صندوقاً من البطاريات، وكانت أربعة من الصناديق معيبة، فما هو احتمال خروج ثلاثة صناديق سالمة اذا أفرزناها بشكل عشوائي من بين الاثني عشر صندوقاً.

هذا المثال تطبيق لبديهية الاتصال، ذلك لاننا نريد قياس احتمال خروج الصندوق الاول سالماً وخروج الصندوق الثاني سالماً. وخروج الصندوق الثالث سالماً أي الاحتمالات الثلاثة معاً، وعلى هذا الاساس لا بد من ضرب الاحتمال الاول في الثاني على تقدير الاول في الثالث على تقدير الاول والثاني.

حينئذ نتساءل: ما هو احتمال خروج الصندوق الاول سالما؟ درجة احتمال هذا الفرض = $\frac{٨}{١٢}$ ، لان عدد الصناديق السالمة ثمانية صناديق من بين اثني عشر صندوقا، ولكن اذا اخرجنا صندوقا سالماً تبقى لدينا سبعة صناديق سالمة.

ثم نتساءل: ما هو احتمال خروج الصندوق الثاني سالماً على افتراض خروج الاول سالماً؟

بعد اخراج الصندوق الاول سالماً يبقى لدينا احد عشر صندوقاً، سبعة منها سالمة، وعليه يكون احتمال خروج الصندوق الثاني سالماً على افتراض خروج الاول سالماً = ($\frac{٧}{١١}$)، ولكن اذا اخرجنا صندوقين سالمين تبقى لدينا ستة صناديق سالمة.

ثم نتساءل : ما هو احتمال خروج الصندوق الثالث سالماً على تقدير خروج الاول والثاني سالمين؟

اتضح أننا اذا اخرجنا الصندوق الاول والثاني سالمين يبقى لدينا عشرة صناديق، ستة منها سالمة.

وحينئذ يكون احتمال خروج الصندوق الثالث سالماً على تقدير خروج الاول والثاني سالمين = $\frac{٦}{١٠}$.

اذن: احتمال خروج الصناديق الثلاثة سالمة = خروج الاول سالماً × خروج الثاني سالماً على تقدير خروج الاول سالماً × خروج الثالث سالماً على تقدير خروج الاول والثاني سالمين.

$$= \frac{٨}{١٢} \times \frac{٧}{١١} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{١٤}{٥٥}$$

نعود الى مثال الكرات فنقرر :

احتمال خروج الكرة الاولى من الحقيبة الاولى زرقاء يساوي $\frac{٥}{١٠}$

احتمال خروج الكرة الاولى من الحقيبة الثانية زرقاء يساوي $\frac{٦}{١٠}$.

احتمال خروج الكرتين زرقاوين يساوي احتمال خروج الكرة الاولى من الحقيبة الاولى زرقاء مضروباً في احتمال خروج الكرة الاولى من الحقيبة الثانية زرقاء على تقدير خروج الكرة الاولى من الحقيبة الاولى زرقاء.

ويمكن تحديد هذا الاحتمال بالارقام فنقول:

أنه يساوي $\frac{٥}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٣٠}{١٠٠} = \frac{٣}{١٠}$

اذن احتمال خروج احدى الكرتين زرقاء =

$\frac{٥}{١٠} + \frac{٦}{١٠} - \frac{٣}{١٠} = \frac{٨}{١٠}$

مثال «٧»: هناك راميان يصيب أحدهما الهدف بنسبة ٨٠٪، ويصيب الآخر الهدف بنسبة ٧٠٪ في نفس الظروف العامة للرماية. فاطلق كل واحد منهما طلقة على الهدف، فما هي قيمة احتمال اصابة الهدف حينئذ؟

نأتي هنا اولاً على حل هذه المسألة، دون الرجوع الى قواعد وبديهيات حساب الاحتمال.

نلاحظ أن الرامي الأول يخطيء أصابة الهدف في «٢٠» مرة، كما أن الرامي الثاني يخطيء أصابة الهدف «٣٠» مرة، أي أنه لا يصيب الهدف ٣ مرات في كل عشر مرات، أن أنه لا يصيب الهدف في العشرين مرة التي يخطيء الرامي الأول فيها ست مرات، فتبقى لدينا ٩٤ مرة يصاب فيها الهدف من قبل أحد الراميين في المئة مرة.

وبتعبير آخر أن الرامي الاول يخطئ الهدف مرتين في كل عشر مرات، وحيث أن الرامي الثاني يخطئ الهدف «٣٠» مرة، فهذا يعني أن ستة طلقات سوف لا تصيب الهدف، وتصيب الهدف ٩٤ طلقة من بين المئة التي يطلقها كل رامٍ من الراميين.

ويمكن ان نستنتج هذه النتيجة بملاحظة الموضوع من زاوية أخرى، حيث نُلاحظ أن عشرين طلقة من طلقات الرامي الأول لا تصيب الهدف، بينما يصيب الرامي الثاني الهدف ٧ مرات في كل عشر مرات، لأنه يصيب الهدف ٧٠٪، أذن فهناك ١٤ طلقة يُرميها الرامي الثاني وتصيب الهدف في العشرين مرة التي يخطأ الرامي الأول فيها اصابة الهدف، فتبقى «٦» طلقات لا تصيب الهدف، وهذا يعني أن أحد الراميين سوف يصيب الهدف في ٩٤ طلقة من الطلقات التي يوجهها كِلا الراميين على الهدف.

هذا الأسلوب في استخراج النتيجة يشبه طريقة حساب العطارين القدامى لثمن بضاعة المشتري، حيث يستخدمون الأصابع والخرز لعدّ الثمن النقدي للبضائع.

أما اذا أردنا أن نرتقي في حسابنا ونستخدم الحاسبة للحصول على النتيجة فهذا يستدعي أن نطبّق بديهتي الأتصال والآنفصال اللذين يشكلان الأساس في الحساب الرياضي للاحتمالات. وسوف نرى أن طريقة العدّ بالخرز ليست خاطئة، أو عاجزة عن الحصول على النتيجة، لكنها عاجزة عن توفير الوقت.

نرجع الى المطلوب في المسألة، وهو عبارة عن ايجاد قيمة احتمال اصابة الهدف في حالة أطلاق كل من الراميين طلقة على الهدف وكان الرامي الأول يصيب الهدف ٨٠ في المائة ويصيبه الثاني ٧٠ في المائة.

المسألة هنا تمثل تطبيقاً من تطبيقات بديهية الانفصال التي تقول أن أحتمال حصول أحدى حادثتين يساوي أحتمال الاولى + احتمال الثانية ـ أحتمالهما معاً.

لكننا لا نستطيع ان نعرف قيمة أحتمالهما معاً دون أن نطبق في المرحلة السابقة بديهية الأتصال، التي تقول: أذا أردنا أن نعرف قيمة أحتمال وقوع حادثتين معاً فعلينا أن نضرب قيمة أحتمال الأولى في قيمة احتمال الثانية على تقدير الأولى.

نأتي الأن على تحديد قيمة أحتمال اصابة كل من الراميين الهدف.

أحتمال أصابتهما الهدف معاً = احتمال اصابة الأول الهدف × أحتمال أصابة الثاني الهدف على تقدير أصابة الأول.

أحتمال اصابتهما الهدف معاً = $\frac{٨٠}{١٠٠} \times \frac{٧٠}{١٠٠} = \frac{٥٦}{١٠٠}$.

نعود الى تحديد أحتمال أصابة الهدف، الذي يعني أحتمال اصابة أحدهما الهدف. وتطبيقاً لبديهية الأنفصال علينا أن نجمع أحتمال أصابة الأول الهدف وأحتمال أصابة الثاني الهدف، ونطرح منهما أحتمال اصابتهما الهدف معاً.

أحتمال أصابة الأول الهدف = $\frac{٨٠}{١٠٠}$.

أحتمال أصابة الثاني الهدف = $\frac{٧٠}{١٠٠}$.

أحتمال أصابتهما الهدف معاً = $\frac{٥٦}{١٠٠}$.

أحتمال أصابة الهدف = $\frac{٨٠}{١٠٠} + \frac{٧٠}{١٠٠} - \frac{٥٦}{١٠٠} = \frac{١٥٠ - ٥٦}{١٠٠}$

$= \frac{٩٤}{١٠٠}$

هنا نلاحظ أن قيمة أحتمال أصابة الهدف تساوي ٩٤٪.، وهي نفس النسبـة التي تحددت، وفقـاً للحساب البدائي الذي استخدمناه في بداية الحديث عن المسألة.

مثال «٨» هناك سيار تان مقبلتان ليلاً من منطقة العدو، وقد حصل لنا علم بأن قائد المجموعة يركب أحدى السيارتين، ولم يكن لدى موقعنا الدفاعي إلا طلقة واحدة في بندقية أحد الجنود، فليس أمامنا إلا قتل قائد المجموعة، وكنا نحتمل أن قائد المجموعة يقل السيارة التي تقع على جهة يسار الرامي، وكانت نسبة أحتمالنا ٩٠٪، وأن قائد المجموعة يركب السيارة اليسارية بأحتمال $\frac{٩}{١٠}$ ، فاعطينا البندقية الى أحد الجنود الماهرين في الـرمـاية الذي يصوب الهدف بنسبة ٩٠٪، أي أن أحتمال أصابته الهدف $\frac{٩}{١٠}$ ، فصوَّب البندقية نحو زجاجة الراكب الذي يجلس جنب السائق في السيارة اليســارية، حيث مكان جلوس قائد المجموعة، وكنا نعلم أن الرامي سوف يُصيب أحدى السيارتين حتماً. وبعد الرمي أسْتَرَقْنا السمع بواسطة أجهزة الأنصاتِ فعلمنا أن قائد المجموعة قد قتل ففي هذه الحالة سوف تزداد قيمة أحتمال أن قائد المجموعة كان يقلّ السيارة اليسارية ولكن ما هي القيمة الجديدة التي سوف يكون عليها أحتمال أن قائد المجموعة كان يقل السيارة اليسارية ؟

وتحديد هذه القيمة يتم من خلال أحدى قواعد حساب الأحتمال، التي تُعرفْ بأسم «الأحتمال العكسي».

يقول مبدأ «الأحتمال العكسي»: «أن قيمة أحتمال حادثة ما على أساس أكتشاف حقيقة ذات صلة بتلك الحادثة تساوي قيمة أحتمال تلك

الحادثة × قيمة أحتمال الحقيقة المكتشفة على تقدير تلك الحادثة مقسوماً على الأحتمال المسبق لتلك الحقيقة قبل اكتشافها».

وحينما نحاول تطبيق قاعدة «الأحتمال العكسي» على المثال الذي قدمناه فسوف نجد أننا لكي نستخرج القيمة الجديدة لأحتمال كون القائد يقل السيارة اليسارية بعد التأكد من أصابته علينا أن نضرب أحتمال جلوس القائد في السيارة اليسارية × أحتمال أصابته على تقدير جلوسه في السيارة اليسارية مقسوماً على أحتمال أصابة القائد قبل الرمي.

أحتمال جلوس القائد في السيارة اليسارية × أحتمال أصابته على تقدير جلوسه في السيارة اليسارية.

أحتمال اصابة القائد قبل الرمي

وحينما نرجع الى لغة الأرقام نلاحظ:

أحتمال جلوس القائد في السيارة اليسارية = $\frac{٩}{١٠}$.

أحتمال أصابة القائد على تقدير جلوسه في السيارة اليسارية = $\frac{٩}{١٠}$.

أما أحتمال أصابة القائد قبل الرمي فهو يساوي مجموع أحتمالين، أحتمال اصابته وهو يقل السيارة اليسارية + أحتمال أصابته وهو يقل السيارة اليمينية. لأن أحتمال اصابة القائد يعني في الواقع أحد احتمالين، وتطبيقاً لبديهيةالانفصاللابد من الجمع. أحتمال اصابة القائد وهو يقل السيارة اليسارية يعني في الحقيقة أحتمال أصابة السيارة اليسارية وأحتمال ركوبه السيارة اليسارية معاً. ولكي نستخرج قيمة هذا الأحتمال علينا أن

نطبق بديهية الأتصال فنضرب أحتمال اصابة السيارة اليسارية × أحتمال ركوب القائد السيارة اليسارية على تقدير الأصابة.

وهذا يعني أن نضرب $\frac{٩}{١٠} \times \frac{٩}{١٠}$

كما أن أحتمال أصابة القائد وهو يَقِلُ السيارة اليمينية يعني أحتمال اصابة السيارة اليمينية وأحتمال ركوب القائد في السيارة اليمينية معاً. ولكي نستخرج قيمة هذا الاحتمال علينا تطبيق بديهية الاتصال فنضرب أحتمال أصابة السيارة اليمينية × أحتمال ركوب القائد السيارة اليمينية على تقدير أحتمال أصابة السيارة اليمينية.

وهذا يعني أن نضرب $\frac{١}{١٠} \times \frac{١}{١٠}$.

اذن: أحتمال اصابته وهو يقل السيارة اليسارية = $\frac{٩}{١٠} \times \frac{٩}{١٠}$.

أحتمال أصابته وهو يقل السيارة اليمينية = $\frac{١}{١٠} \times \frac{١}{١٠}$.

وبما أن أحتمال أصابة القائد قبل الرمي يساوي مجموع احتمالي أصابته وهو يقِل السيارة اليسارية + أحتمال أصابته وهو يقِل السيارة اليمينية فهذا يعني أن أحتمال أصابه القائد قبل الرمي =

$\frac{٩}{١٠} \times \frac{٩}{١٠} + \frac{١}{١٠} \times \frac{١}{١٠}$.

أذن؛ أحتمال أن القائد كان يقل السيارة اليسارية =

$$\frac{\text{أحتمال ركوب القائد في السيارة اليسارية × أحتمال أصابته على تقدير ركوبه في السيارة اليسارية.}}{\text{أحتمال أصابة القائد قبل الرمي.}}$$

$$= \frac{\frac{٩}{١٠} \times \frac{٩}{١٠}}{\frac{١}{١٠} \times \frac{١}{١٠} + \frac{٩}{١٠} \times \frac{٩}{١٠}}$$

$$= \frac{\frac{٨١}{١٠٠}}{\frac{١}{١٠٠} + \frac{٨١}{١٠٠}} = \frac{\frac{٨١}{١٠٠}}{\frac{٨٢}{١٠٠}} = \frac{٨١}{٨٢}$$

وقد يطرح البعض استفهاماً حول المقام في كسر المعادلة، حيث أننا جمعنا أحتمالي أصابة القائد، وهذا الجمع تطبيق لبديهية الأنفصال، ونحن نعرف أن بديهية الأنفصال تنص على أن أحتمال أحد أمرين يساوي ناتج جمع أحتمال كل منهما مطروحاً منه أحتمالهما معاً، فأين طرح أحتمالهما معاً؟

والجواب على هذا الأستفهام كما يلي:

أن الحادثتين اللتين يراد جمع أحتمالهمـا على نوعين:

النوع الاول: أن تكون الحادثتان متنافيتين، أي أنهما لا يجتمعان، واذا كانت الحادثتان متنافيتين ولا يمكن اجتماعهما وأردنا أستخراج قيمة احـداهما فلابد من تطبيق بديهية الانفصال، وذلك بان نجمع بين احتمال الحادثة الاولى وأحتمال الحادثة الثانية ونطرح من الناتج أحتمال الحادثتين معاً.

وأحتمال الحادثتين معاً في فرضية الحوادث المتنافية يساوي صفراً، ومن هنا نهمل طرح هذا الاحتمال. لأن الصفر حينما يُطرح من أي عدد من الأعداد فسوف يبقى ذلك العدد على حاله.

النوع الثاني: أن تكون الحادثتان غير متنافيتين، أي يمكن أجتماعهما، وحينئذ لابد من طرح أحتمالهما معاً من مجموع الحادثتين.

نلاحظ هنا ان المثال رقم «٨» بضم حادثتين متنافيتين، أي أنهما لا يجتمعان، فالقائد إما أن يركب السيارة اليسارية، وإما أن يركب السيارة اليمينية، ولا يمكن أن يركبهما معاً، ومن هنا أهملنا الطرح.

ويلاحظ أيضاً أن الأمثلة رقم «٥»، و«٦»، و«٧» تضم حالات غير متنافية، ولذا اجرينا الطرح.

اخيراً نحاول ان نستخدم الرموز بدل الارقام في حل معادلة الاحتمال العكسي.

نرمز الى احتمال جلوس القائد في السيارة اليسارية بـ ($\frac{\text{ل}}{\text{ح}}$)،

ونرمز الى احتمال اصابة القائد بـ ($\frac{\text{ك}}{\text{ح}}$)، وسوف تكون المعادلة كالتالي:

$$\frac{\text{ل}}{\text{ح.ك}} = \frac{\frac{\text{ل}}{\text{ح}} \times \frac{\text{ك}}{\text{ح.ل}}}{\frac{\text{ك}}{\text{ح}}}$$

ونلاحظ ان هذه المعادلة مستنتجة استنتاجاً رياضياً بحتاً من بديهية الاتصال، اذ ان ح ل و ح ك = $\frac{\text{ل}}{\text{ح}} \times \frac{\text{ك}}{\text{ح.ل}}$. ويساوي أيضا

$$\frac{\text{ك}}{\text{ح}} \times \frac{\text{ل}}{\text{ح.ك}}$$

اذن: ! $$\frac{\text{ل}}{\text{ح}} \times \frac{\text{ك}}{\text{ح.ل}} = \frac{\text{ك}}{\text{ح}} \times \frac{\text{ل}}{\text{ح.ك}}$$

اذن: ! $$\frac{\text{ل}}{\text{ح.ك}} = \frac{\frac{\text{ل}}{\text{ح}} \times \frac{\text{ك}}{\text{ح.ل}}}{\frac{\text{ك}}{\text{ح}}}$$

٣ـ تفسير الأحتمال

أشرنا الى أن الأحتمال يقع ضمن معانٍ مختلفة، ويستعمل بمفاهيم متعددة، وبعد أن تعرفنا على أن الأحتمال يمكن حسابه رياضياً، كما مرت علينا امثله هذا الحساب الرياضي، نجد أنفسنا بحاجة الى طرح تفسير للأحتمال بحيث يكون هذا التفسير معقولاً، وشاملاً لكل الأمثلة التي يمكن أن نطبق عليها الحساب الرياضي ونقيس درجة الأحتمال فيها قياساً رياضياً، أي: أن التفسير المطلوب للأحتمال ينبغي أن يتوفر على شرطين:

الاول: أنسجام التفسير وتوافقه مع المبادئ الاولية للتعريف.

الثاني: أن يكون التفسير شاملاً ومنطبقاً على كل أحتمال يمكن حسابه رياضياً

هناك ثلاثة تفاسير رئيسية تعرف لنا الأحتمال:

التفسير الأول: التعريف الكلاسيكي للأحتمال.

التفسير الثاني: التعريف التكراري للاحتمال.

التفسير الثالث: التعريف الأجمالي للأحتمال.

نأتي على تناول هذه التفاسير، حسب تسلسلها.

التفسير الأول:

يُنسب التفسير الكلاسيكي للأحتمال الى «لابلاس»[1]، ووفق صيغة لابلاس يعبر الاحتمال عن عدد الحالات المؤيدة الى المجموع الكلي للحوادث الممكنة بالتساوي. يعني: أذا كانت لدينا حادثة «ج»، وكانت لهذه الحادثة فرص ملائمة نرمز اليها بـ «س»، ضمن مجموعة فرص ممكنة بالتساوي نرمز اليها بـ «ع»، فأحتمال حادثة ج = $\frac{س}{ع}$.

مثال: اذا كانت لدينا خمس أوراق مرقمة من ١ ـ ٥ موضوعة في صندوق، وأردنا أن نستخرج احدى الأوراق بشكلٍ عشوائي، فما هو أحتمال خروج الورقة رقم «٣»؟

نلاحظ أن لدينا خمسة حوادث ممكنة الوقوع أمكاناً متساوياً، فأما أن تخرج الورقة رقم «١»، وأما أن تخرج الورقة رقم «٢»، وأما أن تخرج الورقة رقم «٣» وأما أن تخرج الورقة رقم «٤»، و اما أن تخرج الورقة رقم «٥».

ويُلاحظ أيضاً أن الفرص الملائمة ـ من بين هذه الحوادث الممكنة بالتساوي ـ لخروج الورقة رقم «٣» عبارة عن فرصة واحدة. وفي هذا الضوء نستطيع القول أن أحتمال خروج الورقة رقم «٣» عند السحب يساوي $\frac{س}{ع} = \frac{١}{٥}$

(١) لابلاس: (١٧٤٩ ـ ١٨٢٧) عالم رياضي فرنسي اليه يرجع الفضل في بناء حساب الاحتمال على اساس نسق نظري.

نقد التفسير الاول

الاشكال الأساس الذي يتسجل على التفسير الكلاسيكي للأحتمال هو: أن هذا التفسير غير منسجم منطقياً، ذلك لانه دوري، حيث يُفسر الأحتمال بالأحتمال.

ولأجل ايضاح هذا الأشكال نقول:

أن التفسير الكلاسيكي للأحتمال يأخذ باعتباره المجموع الكلي للحوادث المتساوية الأمكان، فالأحتمال عبارة عن حاصل قسمة مجموع الحوادث المؤيدة على المجموع الكلي للحوادث الممكنة بالتساوي.

فما هو المراد بالممكنة بالتساوي؟

فتساوي الأمكانية لا يعني الا تساوي الأحتمالية، ومن ثمّ يكون التعريف الكلاسيكي للأحتمال عبارة عن مجموع الحوادث المؤيدة مقسوماً على المجموع الكلي للحوادث المتساوية الأحتمال. ومن هنا قالوا أن التعريف الكلاسيكي للأحتمال يفسر الاحتمال بالاحتمال، ولكي نفهم معنى الاحتمال لابد لنا في المرتبة السابقة من فهم الأحتمال.

التفسير الثاني:

يتبنى هذا التفسير مجموعة من الباحثين في نظرية الأحتمال، ألا أن هذه المجموعة من الباحثين ليست متطابقة ومجمعة على كل التفاصيل التي تتعلق بهذا التفسير، فهناك عدة نظريات ضمن اطار المدرسة التكرارية.

ورغم ذلك هناك جامع بين هذه النظريات، ذلك انها تتفق على تفسير الأحتمال على اساس تكرار الوقوع، دون أفتراض مسبق لتساوي الأمكانية، بل تعتقد بضرورة تحديد درجة الأحتمال على اساس الواقع التجريبي.

على كلٍ حال نقتصر هنا على ذكر تعريف تكراري للأحتمال يُنسب الى نظرية تُدعى بـ «نظرية التكرار المحدود».

«أذا كانت لدينا فئتان فئة «أ»، وفئة «ب»، وأخترنا فرداً من فئة «أ» بشكلٍ عشوائي، وأردنا أن نعرف أحتمال أن يكون الفرد «أ» منتمياً الى الصنف «ب»، فنحدد الأحتمال بقسمة عدد افراد «أ» التي هي من الصنف «ب» على العدد الكلي لأفراد «أ».»

مثال: أذا كانت لدينا فئتان فئة الكرات وفئة الحمراء، وأخترنا كرة من بين الكرات فما هو أحتمال أن تكون الكرة المسحوبة عشوائياً حمراء؟

$$\text{أحتمال أن تكون الكرة حمراء} = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}}$$

ونستعيض بالرموز فنقول: $ح = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ}}$

نقدالتفسير التكراري

بالرغم من أنسجام هذا التفسير بنفسه، وعدم وقوعه بما وقع به التفسير الكلاسيكي من عدم أنسجام، إلا أنه لا يستوفي الشرط الثاني من الشرطين اللذين ذكرناهما كاساس للتعريف المطلوب. أي: « شمول

التعريف وانطباقه على كل احتمال يمكن تحديده رياضياً».

أن التعريف المتقدم يُقيم الأحتمال بوصفه علاقة بين فئتين. فماذا نصنع لو كان الحدث المطلوب تحديد درجة أحتماله يمثل واقعة فردية؟

فالأحتمال في تفسيره التكراري لا يشمل ـ على سبيل المثال ـ تحديد درجة أحتمال وجود «عبد الله ابن سبأ» كشخصية تاريخية مارست دوراً في التاريخ؛ لأن وجود عبد الله ابن سبأ حادثة فردية.

التعريف الأجمالي:

تبنى هذا التعـريف الفيلسـوف المجدد الشهيد السيد محمد باقر الصـدر في كتابه «الأسس المنطقية للأستقراء». وقد أصطلحت على هذا التعـريف أسم «التعريف الأجمالي»، لأن هذا التعريف يقوم أساساً على مفهوم «العلم الأجمالي»، ومن هنا لابد من تحليل هذا المفهوم اولاً، كمدخل لفهم التعريف وتحديد صياغته.

ماهو المعني بـ «العلم الأجمالي»؟

لكل علم معلوم، وحينما يكون لديّ علم، فلابد من معلوم، يتعلق به هذا العلم.

المعلوم الذي يتعلق به العلم على نحوين:

١ـ أن يكون المعلوم محدداً بشكل كامل، كما لو أخبرت بأن أحد الـوزراء يقـوم اليوم بزيارة الى مدينتي، فذهبت الى الحفـل الـذي اقيم لأستقباله فوجدته وزير التعليم، فتحدد المعلوم لديّ بشكل دقيق، حيث سوف أجزم بأن الزائر هو وزير التعليم.

٢ـ أنْ يكون المعلوم مردداً وغير محدد بشكلٍ كامل ودقيق. كما لو أخبرت بأن أحد الوزراء يقوم بزيارة الى المدينة، فذهبت الى موقع الاحتفاء به، فلم أستطع أن أشخصه، ولم أحدد بالضبط هل هو وزير التعليم أم هو وزير...؟

ففي هذه الحالة يبقى المعلوم مردداً بين كل الوزراء الذين يشغلون الحقائب الوزارية في بلدي.

وعلى هذا الاساس ينقسم العلم الى قسمين:

١ـ العلم التفصيلي، وهو العلم الذي يكون معلومه محدداً.
٢ـ العلم الأجمالي، وهو العلم الذي يكون معلومه مردداً.

نأتي الآن الى العلم الأجمالي، ولعلك تتساءل: أذا كان المعلوم أمراً مردداً فبأي شيء يتعلق العلم؟ حيث أن العلم لابد له من معلوم مشخص، وأذا كان المعلوم مردداً وغير محدد في اُفق النفس، فمثل هذا العلم يساوي الشك والتردد، الذي هو من مقولة الجهل، لا العلم!

ولكن هذا التساؤل سرعان ما تتضح الأجابة عليه حينما نتعمق في فهم طبيعة العلم الأجمالي. ذلك أن العلم الأجمالي لا يعني العلم بالتردد وعدم التشخيص، لكي يقال أن هذا يعني التناقض، فالعلم والتردد أمران لا يجتمعان. أنما يعني العلم الأجمالي أننا نعلم بشيء مردد، فالشيء معلوم لكنه مردد بين مصاديق متعددة.

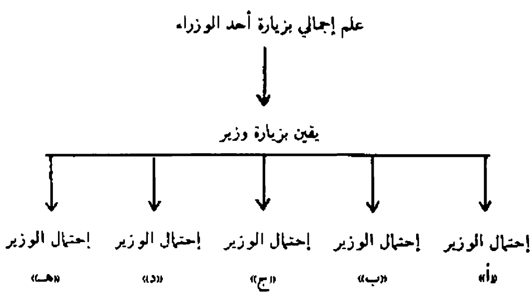
العلم الأجمالي يتعلق بمعلوم وهذا المعلوم عنوان عام وكلي صالح للأنطباق على مصاديق متعددة. ففي المثال الذي تقدم نحن نعلم بأن وزيراً

يزور المدينة، لكن عنوان الوزير صالح للأنطباق على وزير العدل ووزير النفط ووزير الأعلام .... فالأجمال الذي يلف هذا العلم لا يشمل أصل المعلوم، بل المجمل هو أنطباق هذا المعلوم على مصاديقه ، بحيث لا نستطيع أن نشخص مصداقاً محدداً ينطبق عليه العنوان الكلي بشكل جازم. بل يبقى كل مصداق من المصاديق التي تصلح لأنطباق الحكم الكلي عليها محتملاً. فمن الممكن أن يكون الوزير الزائر هو وزير العدل ومن الممكن أيضاً أن يكون وزير النفط، ومن الممكن....

من هنا يتضح ان العلم الأجمالي له أطراف متعددة بعدد المصاديق الصالحة لأنطباق العنوان الكلي عليها.

وكل مصداق وكل طرف من هذه الأطراف أمر محتمل.

اذن! فالعلم الأجمالي يقين بالكلي وأحتمال يتعلق بكل طرف من أطراف ومصاديق الكلي. فحينما يكون لدينا علم أجمالي يكون لدينا يقين بوقوع حدث وحصول واقعة من الحوادث والوقائع، كما سيكون لدينا أحتمال بأن هذه الواقعة سوف تكون متمثلة في «أ» أو «ب»... وغيرها من التطبيقات الصالحة لتمثل الواقعة وتجسدها فيها. ونستطيع أن نقدم المسألة في ضوء الرسم التوضيحي التالي:



«هذا الرسم التوضيحي يوضح حالة ما اذا كان الوزراء خمسة».

على اساس ما تقدم نستطيع ان نعرف ان الاحتمال مفهوم يتضمنه كل طرف من اطراف العلم الاجمالي، ولكن كيف نحدد قيمة الإحتمال في ضوء مفهوم العلم الإجمالي؟ وللإجابة على هذا الإستفهام لا بد لنا من عودة الى مفهوم العلم الإجمالي، لنلاحظ:

أن العلم الأجمالي له أطراف متعددة، وهناك أحتمال في ان يكون العلم الأجالي متمثلاً في كل طرف من الأطراف، فمن المحتمل أن يكون الزائر ـ في المثال المتقدم ـ هو الوزير «أ» ومن المحتمل أن يكون الزائر هو الوزير «ب»....

نلاحظ هنا أن العلم الأجمالي يتمثل في مجموعة الأطراف، وهو أي: «العلم الأجمالي» حيادي أزاء كل طرف من هذه الأطراف، فلا يعيّن ولا يشخص أياً منها، بل حيادي إزاءها.

ونـلاحظ أيضاً أن كل طرف من هذه الأطراف يستلزم قضية من القضايا. فالطرف الأول ـ كما هو الحال في المثال المتقدم ـ يستلزم زيارة وزير العدل، والطرف الثاني يستلزم زيارة ...

وإذا اردنا أن نحدد قيمة أحتمال أي قضية من القضايا فعلينا أن نقسم عدد ما يلازمها من أطراف العلم الأجمالي على المجموع الكلي لهذه الأطراف.

مثال: أذا كانت لدينا عشر كرات مرقمة من ١ــــ١٠، موضوعة في صندوق، واردنا أن نخرج منها كرة واحدة بشكلٍ عشوائي، فما هي قيمة أحتمال ان تخرج الكرة وهي تحمل عدداً فردياً؟

لدينا في هذا المثال علم أجمالي، وهو عبارة عن العلم بخروج كرة من الكرات العشرة، ولهذا العلم عشرة أطراف، أذ من الممكن أن تخرج الكرة رقم «١»، ومن الممكن أن تخرج الكرة رقم «٢»، ومن الممكن أن تخرج الكرة رقم «٣»،.....

اما القضية التي نُريد تحديد قيمة أحتمالها فهي عبارة عن:

«خروج الكرة التي تحمل عدداً فردياً».

يُلاحظ أن قضية «خروج الكرة التي تحمل عدداً فردياً» يُلازمها خروج الكرة وهي تحمل الرقم «١» (الطرف الأول)، وخروج الكرة وهي تحمل الرقم «٣» (الطرف الثالث)، وخروج الكرة رقم «٥»، ورقم «٧»، ورقم «٩» (الطرف التاسع). وبما أن المجموع الكلي لعدد أطراف العلم الأجمالي يساوي عشرة، أذن أحتمال خروج الكرة التي تحمل عدداً فردياً يساوي $\frac{٥}{١٠}$.

نخلص مما تقدم أن الأحتمال يُمثل دائمًا طرفاً من أطراف العلم الأجمالي، وقيمة أي قضية يُراد تحديد درجة أحتمالها تساوي عدد ما يُلازمها من أطراف العلم الأجمالي مقسوماً على المجموع الكلي لعدد اطراف العلم الأجمالي.

تطبيق التعريف على الأمثله:

تقدم عرض ثمانية أمثلة لحساب قيمة أحتمال الحوادث. نحاول في هذه الفقـرة من البحث أن نتعـرف على شمول التعريف وانسجامه من الأمثلة المتقـدمة. علماً أننا قمنا في الفقرة السابقة بتطبيق التعريف على المثال الأول.

التعريف والمثال الثاني:

لدينا ـ في هذا المثال ـ علم أجمالي، وعدد أطراف هذا العلم عبارة عن تسعة أطراف، لأن الورقة المسحوبة أما أن تكون الورقة رقم «١» او «٢» او «٣»......... «٩».

والقضية المطلوب قياس درجة أحتمالها عبارة عن «خروج الورقة وهي تحمل عدداً فردياً»، ولدينا هنا خمسة أطراف تلازم هذه القضية، وهي عبارة عن الأطراف التي تحمل عدداً فردياً (خروج الورقة رقم «١»، ورقم «٣»، ورقم «٥»، ورقم «٧»، ورقم «٩».)

وبما أن التعريف يقول أن درجة أحتمال الحادثة =

$$\frac{\text{عدد الأطراف التي تلازمها}}{\text{المجموع الكلي لعدد أطراف العلم الأجمالي}}$$

أذن أحتمال خروج الورقة وهي تحمل عدداً فرديا = $\frac{٥}{٩}$.

وهذه النتيجة مطابقة لما تمّ حسابه رياضياً في المثال.

التعريف والمثال الثالث:

لدينا في هذا المثال رواية يرويها أربعة رواة، وكنا نحتمل صدق كل راوي من هولاء بدرجة ٧٥٪ أي $\frac{٣}{٤}$ ، ووفقاً لبديهية الأتصال نقوم بضرب أحتمال صدق الأول في أحتمال صدق الثاني على تقدير صدق الأول، في أحتمال صدق الثالث على تقدير صدق الأول والثاني، في أحتمال صدق الرابع على تقدير صدق الرواة الثلاثة، وكانت النتيجة « $\frac{٨١}{٢٥٦}$ ».

فهل يتطابق التعريف مع هذه النتيجة؟

أن التعريف يقول أن درجة أحتمال صدق الرواية يساوي

$$\frac{\text{عدد الأطراف التي تلازمها}}{\text{المجموع الكلي لعدد أطراف العلم الأجمالي}}$$

وهذا يعني أن يكون لدينا علم أجمالي يتكون من ٢٥٦ طرفاً ، وأن يكون «٨١» طرفاً من هذا العلم ملازماً لصدق الرواية.

فيا ترى من أين يأتي هذا العلم؟

تفترض المسألة التي يطرحها المثال أن أحتمال صدق كل راوي من الرواة الأربعة يساوي $\frac{٣}{٤}$ ، وهذا يعني أن لدينا علماً أجمالياً يتألف من أربعة أطراف ثلاثة أطراف منها تنسجم وتلازم صدق الراوي، وطرف واحد يُلازم كذب الراوي، أي: أننا علمنا بأن هناك ثلاثة عوامل لصدق الراوي وعامل واحد لكذبه.

من هنا فنحن حينما نلاحظ أحتمال صدق كل راوٍ من الرواة نجد أن لدينا علماً أجمالياً يتألف من أربعة أطراف. وحينما يكون رواة النبأ اثنين

نحتمل في كل واحد منهما الصدق بنسبة $\frac{٣}{٤}$ فسوف تكون أطراف العلم الأجمالي عبارة عن ستة عشر طرفاً، ذلك لأننا في العلم الأجمالي الأول (حينما يكون الراوي واحداً) كانت لدينا أربعة أطراف، ثلاثة في صالح صدق الراوي، وطرف واحد في صالح كذبه، وأذا أستخدمنا الرموز نقول:

العلم الأجمالي الأول يتألف من أربعة أطراف وهي:

أ، ب، ج، د.

والطرف «أ» في صالح كذب الراوي، والأطراف الأخرى في صالح صدقه، هذا أذا لاحظنا الراوي الأول بمفرده.

أما أذا لاحظنا الراوي الثاني بمفرده فسوف نجد لدينا علماً أجمالياً مؤلفاً من أربعة أطراف أيضاً، ولنَرمز لها بـ:

أَ، بَ، جَ، دَ، والطرف «أَ» في صالح كذب الراوي، والأطراف الأخرى في صالح صدقه.

فأذا أردنا أن نقيس أحتمال صدق الرواية مع كون الرواة لها راويين فسوف نجد أن أحتمال صدق الرواية يدخل في أطار علم أجمالي جديد مكون من أطراف جديدة أيضاً، لأننا سوف نعلم بتحقق أحدى الظواهر التالية:

فأما أن يحدث أ مع أَ.

وأما أن يحدث أ مع بَ.

وأما أن يحدث أ مع جَ.

وأما أن يحدث أ مع دَ.

وأما أن يحدث ب مع أَ.

وأما أن يحدث ب مع بَ.
وأما أن يحدث ب مع جَ.
وأما أن يحدث ب مع دَ.
وأما أن يحدث ج مع أ.
وأما أن يحدث ج مع بَ.
وأما أن يحدث ج مع جَ.
وأما أن يحدث ج مع دَ.
وأما أن يحدث د مع أ.
وأما أن يحدث د مع بَ.
وأما أن يحدث د مع جَ.
وأما أن يحدث د مع دَ.

ونلاحظ هنا أن عدد أطراف العلم هي ١٦ طرفاً، كما نلاحظ أيضاً أن تسعة أطراف منها في صالح صدق الرواية، وسبعة أطراف منها في صالح كذبها. وحينما نُطبق التعريف الأجمالي نجد أن أحتمال صدق الرواية = $\frac{٩}{١٦}$.

أما أذا كان الرواة ثلاثة فسوف تتغير أطراف العلم الأجمالي وتكبر وتتسع وتصبح أربعة وستين طرفاً. فأذا رَمزنا الى أطراف العلم الأجمالي المتعلق بالراوي الثالث بـ:

أً بً جً دً.

ولاحظنا الرواية بأعتبار أن رواتها ثلاثة، ونحتمل صدق كل واحد

منهم بنسبة $\frac{٣}{٤}$ ، فسوف نعلم بتحقق أحدى الظواهر التالية:

(١) فأما أن يحدث أ مع أَ وأً.
(٢) فأما أن يحدث أ مع أَ وبً.
(٣) فأما أن يحدث أ مع أَ وجً.
(٤) فأما أن يحدث أ مع أَ ودً.
(٥) فأما أن يحدث أ مع بَ وأً.
(٦) فأما أن يحدث أ مع بَ وبً
(٧) فأما أن يحدث أ مع بَ وجً.
(٨) فأما أن يحدث أ مع بَ ودً.
(٩) فأما أن يحدث أ مع جَ وأً.
(١٠) فأما أن يحدث أ مع جَ وبً.
(١١) فأما أن يحدث أ مع جَ وجً.
(١٢) فأما أن يحدث أ مع جَ ودً.
(١٣) فأما أن يحدث أ مع دَ وأً.
(١٤) فأما أن يحدث أ مع دَ وبً.
(١٥) فأما أن يحدث أ مع دَ وجً.
(١٦) فأما أن يحدث أ مع دَ ودً.
(١٧) فأما أن يحدث ب مع أَ وأً.
(١٨) فأما أن يحدث ب مع أَ وبً.
(١٩) فأما أن يحدث ب مع أَ وجً.
(٢٠) فأما أن يحدث ب مع أَ ودً.

(٢١) فأما أن يحدث ب مع بَ وأً.

(٢٢) فأما أن يحدث ب مع بَ وبً.

(٢٣) فأما أن يحدث ب مع بَ وجً.

(٢٤) فأما أن يحدث ب مع بَ ودً.

(٢٥) فأما أن يحدث ب مع جَ وأً.

(٢٦) فأما أن يحدث ب مع جَ وبً.

(٢٧) فأما أن يحدث ب مع جَ وجً.

(٢٨) فأما أن يحدث ب مع جَ ودً.

(٢٩) فأما أن يحدث ب مع دَ وأً.

(٣٠) فأما أن يحدث ب مع دَ وبً.

(٣١) فأما أن يحدث ب مع دَ وجً.

(٣٢) فأما أن يحدث ب مع دَ ودً.

(٣٣) فأما أن يحدث ج مع أَ وأً.

(٣٤) فأما أن يحدث ج مع أَ وبً.

(٣٥) فأما أن يحدث ج مع أَ وجً.

(٣٦) فأما أن يحدث ج مع أَ ودً.

(٣٧) فأما أن يحدث ج مع بَ وأً.

(٣٨) فأما أن يحدث ج مع بَ وبً.

(٣٩) فأما أن يحدث ج مع بَ وجً.

(٤٠) فأما أن يحدث ج مع بَ ودً.

(٤١) فأما أن يحدث ج مع جَ وأً.

(٤٢) فأما أن يحدث ج مع جَ وبً.

(٤٣) فأما أن يحدث ج مع جَ وجً.
(٤٤) فأما أن يحدث ج مع جَ ودً.
(٤٥) فأما أن يحدث ج مع دَ وأً.
(٤٦) فأما أن يحدث ج مع دَ وبً.
(٤٧) فأما أن يحدث ج مع دَ وجً.
(٤٨) فأما أن يحدث ج مع دَ ودً.
(٤٩) فأما أن يحدث د مع أَ وأً.
(٥٠) فأما أن يحدث د مع أَ وبً.
(٥١) فأما أن يحدث د مع أَ وجً.
(٥٢) فأما أن يحدث د مع أَ ودً.
(٥٣) فأما أن يحدث د مع بَ وأً.
(٥٤) فأما أن يحدث د مع بَ وبً.
(٥٥) فأما أن يحدث د مع بَ وجً.
(٥٦) فأما أن يحدث د مع بَ ودً.
(٥٧) فأما أن يحدث د مع جَ وأً.
(٥٨) فأما أن يحدث د مع جَ وبً.
(٥٩) فأما أن يحدث د مع جَ وجً.
(٦٠) فأما أن يحدث د مع جَ ودً.
(٦١) فأما أن يحدث د مع دَ وأً.
(٦٢) فأما أن يحدث د مع دَ وبً.
(٦٣) فأما أن يحدث د مع دَ وجً .
(٦٤) فأما أن يحدث د مع دَ ودً.

يُلاحظ هنا أن مجموعة أطراف العلم الأجمالي أصبح عددها «٦٤» طرفاً، كما يُلاحظ أن عدد الأطراف التي تُلازم الصدق هي «٢٧» طرفاً، وعدد الأطراف التي تُلازم الكذب هي «٣٧» طرفاً. وحينما نُطبق التعريف الأجمالي نجد أن أحتمال صدق الرواية = $\frac{٢٧}{٦٤}$.

أمـا أذا كان عدد الرواة أربعة، وكان الرابع يروي عن الثالث، والثالث عن الثاني، والثاني يروي عن الأول، وكان أحتمال صدق كل راوي من الرواة الأربعة يساوي $\frac{٣}{٤}$ ، فسوف يتغير عدد أطراف العلم الأجمالي وتصبح «٢٥٦» طرفاً.

أيضاح ذلك: حينما نُلاحظ الراوي الرابع نجد أن أحتمال صدقه يساوي $\frac{٣}{٤}$ ، وهذا يعني أننا نعلم حينئذ بوجود أربعة عوامل، ثلاثة منها لصالح صدقه وواحد منها لصالح كذبه. ولنرمز الى هذه العوامل بـ: أٍ، بٍ، جٍ، دٍ.

وأذا لاحظنا الرواية، التي يرويها أربعة رواة، وكان أحتمال صدق كل راوي من هؤلاء يساوي $\frac{٣}{٤}$ ، فسوف نعلم بحصول وتحقق أحدى الظواهر التالية:

(١) أما أن يحدث أ، أَ، أً، أٌ.
(٢) وأما أن يحدث أ، أَ، أً، بٌ.
(٣) وأما أن يحدث أ، أَ، أً، جٌ.
(٤) وأما أن يحدث أ، أَ، أً، دٌ.
(٥) وأما أن يحدث أ، أَ، بً، أٌ.
(٦) وأما أن يحدث أ، أَ، بً، بٌ.

(٧) وأما أن يحدث أ، أَ، بً، جٌ.
(٨) وأما أن يحدث أ، أَ، بً، دٌ.
(٩) وأما أن يحدث أ، أَ، جً، أٌ.
(١٠) وأما أن يحدث أ، أَ، جً، بٌ.
(١١) وأما أن يحدث أ، أَ، جً، جٌ.
(١٢) وأما أن يحدث أ، أَ، جً، دٌ.
(١٣) وأما أن يحدث أ، أَ، دً، أٌ.
(١٤) وأما أن يحدث أ، أَ، دً، بٌ.
(١٥) وأما أن يحدث أ، أَ، دً ، جٌ.
(١٦) وأما أن يحدث أ، أَ، دً ، دٌ.
(١٧) وأما أن يحدث أ، بَ، أً، أٌ.
(١٨) وأما أن يحدث أ، بَ، أً، بٌ.
(١٩) وأما أن يحدث أ، بَ، أً، جٌ.
(٢٠) وأما أن يحدث أ، بَ، أً، دٌ.
(٢١) وأما أن يحدث أ، بَ، بً، أٌ.
(٢٢) وأما أن يحدث أ، بَ، بً، بٌ.
(٢٣) وأما أن يحدث أ، بَ، بً، جٌ.
(٢٤) وأما أن يحدث أ، بَ، بً، دٌ.
(٢٥) وأما أن يحدث أ، بَ، جً، أٌ.
(٢٦) وأما أن يحدث أ، بَ، جً، بٌ.
(٢٧) وأما أن يحدث أ، بَ، جً، جٌ.
(٢٨) وأما أن يحدث أ، بَ، جً، دٌ.

(٢٩) وأما أن يحدث أ، بَ، دُ، أً.

(٣٠) وأما أن يحدث أ، بَ، دُ، بً.

(٣١) وأما أن يحدث أ، بَ، دُ، جً.

(٣٢) وأما أن يحدث أ، بَ، دُ، دً.

(٣٣) وأما أن يحدث أ، جَ، أُ، أً.

(٣٤) وأما أن يحدث أ، جَ، أُ، بً.

(٣٥) وأما أن يحدث أ، جَ، أُ، جً.

(٣٦) وأما أن يحدث أ، جَ، أُ، دً.

(٣٧) وأما أن يحدث أ، جَ، بُ، أً.

(٣٨) وأما أن يحدث أ، جَ، بُ، بً.

(٣٩) وأما أن يحدث أ، جَ، بُ، جً.

(٤٠) وأما أن يحدث أ، جَ، بُ، دً.

(٤١) وأما أن يحدث أ، جَ، جُ، أً.

(٤٢) وأما أن يحدث أ، جَ، جُ، بً.

(٤٣) وأما أن يحدث أ، جَ، جُ، جً.

(٤٤) وأما أن يحدث أ، جَ، جُ، دً.

(٤٥) وأما أن يحدث أ، جَ، دُ، أً.

(٤٦) وأما أن يحدث أ، جَ، دُ، بً.

(٤٧) وأما أن يحدث أ، جَ، دُ، جً.

(٤٨) وأما أن يحدث أ، جَ، دُ، دً.

(٤٩) وأما أن يحدث أ، دَ، أُ، أً.

(٥٠) وأما أن يحدث أ، دَ، أُ، بً.

(٥١) وأما أن يحدث أ، دَ، أً، جًّ.
(٥٢) وأما أن يحدث أ، دَ، أً، دًّ.
(٥٣) وأما أن يحدث أ، دَ، بً، أًّ.
(٥٤) وأما أن يحدث أ، دَ، بً، بًّ.
(٥٥) وأما أن يحدث أ، دَ، بً، جًّ.
(٥٦) وأما أن يحدث أ، دَ، بً، دًّ.
(٥٧) وأما أن يحدث أ، دَ، جً، أًّ.
(٥٨) وأما أن يحدث أ، دَ، جً، بًّ.
(٥٩) وأما أن يحدث أ، دَ، جً، جًّ.
(٦٠) وأما أن يحدث أ، دَ، جً، دًّ.
(٦١) وأما أن يحدث أ، دَ، دً، أًّ.
(٦٢) وأما أن يحدث أ، دَ، دً، بًّ.
(٦٣) وأما أن يحدث أ، دَ، دً، جًّ.
(٦٤) وأما أن يحدث أ، دَ، دً، دًّ.
(٦٥) وأما أن يحدث ب، أَ، أً، أًّ.
(٦٦) وأما أن يحدث ب، أَ، أً، بًّ.
(٦٧) وأما أن يحدث ب، أَ، أً، جًّ.
(٦٨) وأما أن يحدث ب، أَ، أً، دًّ.
(٦٩) وأما أن يحدث ب، أَ، بً، أًّ.
(٧٠) وأما أن يحدث ب، أَ، بً، بًّ.
(٧١) وأما أن يحدث ب، أَ، بً، جًّ.
(٧٢) وأما أن يحدث ب، أَ، بً، دًّ.

(٧٣) وأما أن يحدث ب، أ، جً، أً.
(٧٤) وأما أن يحدث ب، أ، جً، بًّ.
(٧٥) وأما أن يحدث ب، أ، جً، جًّ.
(٧٦) وأما أن يحدث ب، أ، جً، دًّ.
(٧٧) وأما أن يحدث ب، أ، دً، أً.
(٧٨) وأما أن يحدث ب، أ، دً، بًّ.
(٧٩) وأما أن يحدث ب، أ، دً، جًّ.
(٨٠) وأما أن يحدث ب، أ، دً، دًّ.
(٨١) وأما أن يحدث ب، بَ، أً، أًّ.
(٨٢) وأما أن يحدث ب، بَ، أً، بًّ.
(٨٣) وأما أن يحدث ب، بَ، أً، جًّ.
(٨٤) وأما أن يحدث ب، بَ، أً، دًّ.
(٨٥) وأما أن يحدث ب، بَ، بً، أً.
(٨٦) وأما أن يحدث ب، بَ، بً، بًّ.
(٨٧) وأما أن يحدث ب، بَ، بً، جًّ.
(٨٨) وأما أن يحدث ب، بَ، بً، دًّ.
(٨٩) وأما أن يحدث ب، بَ، جً، أً.
(٩٠) وأما أن يحدث ب، بَ، جً، بًّ.
(٩١) وأما أن يحدث ب، بَ، جً، جًّ.
(٩٢) وأما أن يحدث ب، بَ، جً، دًّ.
(٩٣) وأما أن يحدث ب، بَ، دً، أً.
(٩٤) وأما أن يحدث ب، بَ، دً، بًّ.

(٩٥) وأما أن يحدث ب، بَ، دً، جٌ.

(٩٦) وأما أن يحدث ب، بَ، دً، دٌ.

(٩٧) وأما أن يحدث ب، جَ، أً، أٌ.

(٩٨) وأما أن يحدث ب، جَ، أً، بٌ.

(٩٩) وأما أن يحدث ب، جَ، أً، جٌ.

(١٠٠) وأما أن يحدث ب، جَ، أً، دٌ.

(١٠١) وأما أن يحدث ب، جَ، بً، أٌ.

(١٠٢) وأما أن يحدث ب، جَ، بً، بٌ.

(١٠٣) وأما أن يحدث ب، جَ، بً، جٌ.

(١٠٤) وأما أن يحدث ب، جَ، بً، دٌ.

(١٠٥) وأما أن يحدث ب، جَ، جً، أٌ.

(١٠٦) وأما أن يحدث ب، جَ، جً، بٌ.

(١٠٧) وأما أن يحدث ب، جَ، جً، جٌ.

(١٠٨) وأما أن يحدث ب، جَ، جً، دٌ.

(١٠٩) وأما أن يحدث ب، جَ، دً، أٌ.

(١١٠) وأما أن يحدث ب، جَ، دً، بٌ.

(١١١) وأما أن يحدث ب، جَ، دً، جٌ.

(١١٢) وأما أن يحدث ب، جَ، دً، دٌ.

(١١٣) وأما أن يحدث ب، دَ، أً، أٌ.

(١١٤) وأما أن يحدث ب، دَ، أً، بٌ.

(١١٥) وأما أن يحدث ب، دَ، أً، جٌ.

(١١٦) وأما أن يحدث ب، دَ، أً، دٌ.

(١١٧) وأما أن يحدث ب، دَ، بً، أً.

(١١٨) وأما أن يحدث ب، دَ، بً، بً.

(١١٩) وأما أن يحدث ب، دَ، بً، جً.

(١٢٠) وأما أن يحدث ب، دَ، بً، دً.

(١٢١) وأما أن يحدث ب، دَ، جً، أً.

(١٢٢) وأما أن يحدث ب، دَ، جً، بً.

(١٢٣) وأما أن يحدث ب، دَ، جً، جً.

(١٢٤) وأما أن يحدث ب، دَ، جً، دً.

(١٢٥) وأما أن يحدث ب، دَ، جً، أً.

(١٢٦) وأما أن يحدث ب، دَ، جً، بً.

(١٢٧) وأما أن يحدث ب، دَ، جً، جً.

(١٢٨) وأما أن يحدث ب، دَ، جً، دً.

(١٢٩) وأما أن يحدث ج، أَ، أً، أً.

(١٣٠) وأما أن يحدث ج، أَ، أً، بً.

(١٣١) وأما أن يحدث ج، أَ، أً، جً.

(١٣٢) وأما أن يحدث ج، أَ، أً، دً.

(١٣٣) وأما أن يحدث ج، أَ، بً، أً.

(١٣٤) وأما أن يحدث ج، أَ، بً، بً.

(١٣٥) وأما أن يحدث ج، أَ، بً، جً.

(١٣٦) وأما أن يحدث ج، أَ، بً، دً.

(١٣٧) وأما أن يحدث ج، أَ، جً، أً.

(١٣٨) وأما أن يحدث ج، أَ، جً، بً.

(١٣٩) وأما أن يحدث ج، أ، جً، جً.
(١٤٠) وأما أن يحدث ج، أ، جً، دً.
(١٤١) وأما أن يحدث ج، أ، دً، أً.
(١٤٢) وأما أن يحدث ج، أ، دً، بً.
(١٤٣) وأما أن يحدث ج، أ، دً، جً.
(١٤٤) وأما أن يحدث ج، أ، دً، دً.
(١٤٥) وأما أن يحدث ج، بَ، أ، أً.
(١٤٦) وأما أن يحدث ج، بَ، أ، بً.
(١٤٧) وأما أن يحدث ج، بَ، أ، جً.
(١٤٨) وأما أن يحدث ج، بَ، أ، دً.
(١٤٩) وأما أن يحدث ج، بَ، بً، أً.
(١٥٠) وأما أن يحدث ج، بَ، بً، بً.
(١٥١) وأما أن يحدث ج، بَ، بً، جً.
(١٥٢) وأما أن يحدث ج، بَ، بً، دً.
(١٥٣) وأما أن يحدث ج، بَ، جً، أً.
(١٥٤) وأما أن يحدث ج، بَ، جً، بً.
(١٥٥) وأما أن يحدث ج، بَ، جً، جً.
(١٥٦) وأما أن يحدث ج، بَ، جً، دً.
(١٥٧) وأما أن يحدث ج، بَ، دً، أً.
(١٥٨) وأما أن يحدث ج، بَ، دً، بً.
(١٥٩) وأما أن يحدث ج، بَ، دً، جً.
(١٦٠) وأما أن يحدث ج، بَ، دً، دً.

(١٦١) وأما أن يحدث ج، جَ، أُ، أٌ.

(١٦٢) وأما أن يحدث ج، جَ، أُ، بٌ.

(١٦٣) وأما أن يحدث ج، جَ، أُ، جٌ.

(١٦٤) وأما أن يحدث ج، جَ، أُ، دٌ.

(١٦٥) وأما أن يحدث ج، جَ، بُ، أٌ.

(١٦٦) وأما أن يحدث ج، جَ، بُ، بٌ.

(١٦٧) وأما أن يحدث ج، جَ، بُ، جٌ.

(١٦٨) وأما أن يحدث ج، جَ، بُ، دٌ.

(١٦٩) وأما أن يحدث ج، جَ، جُ، أٌ.

(١٧٠) وأما أن يحدث ج، جَ، جُ، بٌ.

(١٧١) وأما أن يحدث ج، جَ، جُ، جٌ.

(١٧٢) وأما أن يحدث ج، جَ، جُ، دٌ.

(١٧٣) وأما أن يحدث ج، جَ، دُ، أٌ.

(١٧٤) وأما أن يحدث ج، جَ، دُ، بٌ.

(١٧٥) وأما أن يحدث ج، جَ، دُ، جٌ.

(١٧٦) وأما أن يحدث ج، جَ، دُ، دٌ.

(١٧٧) وأما أن يحدث ج، دَ، أُ، أٌ.

(١٧٨) وأما أن يحدث ج، دَ، أُ، بٌ.

(١٧٩) وأما أن يحدث ج، دَ، أُ، جٌ.

(١٨٠) وأما أن يحدث ج، دَ، أُ، دٌ.

(١٨١) وأما أن يحدث ج، دَ، بُ، أٌ.

(١٨٢) وأما أن يحدث ج، دَ، بُ، بٌ.

(١٨٣) وأما أن يحدث ج، دَ، بً، جٌّ.

(١٨٤) وأما أن يحدث ج، دَ، بً، دٌّ.

(١٨٥) وأما أن يحدث ج، دَ، جً، أٌّ.

(١٨٦) وأما أن يحدث ج، دَ، جً، بٌّ.

(١٨٧) وأما أن يحدث ج، دَ، جً، جٌّ.

(١٨٨) وأما أن يحدث ج، دَ، جً، دٌّ.

(١٨٩) وأما أن يحدث ج، دَ، دً، أٌّ.

(١٩٠) وأما أن يحدث ج، دَ، دً، بٌّ.

(١٩١) وأما أن يحدث ج، دَ، دً، جٌّ.

(١٩٢) وأما أن يحدث ج، دَ، دً، دٌّ.

(١٩٣) وأما أن يحدث د، أَ، أً، أٌّ.

(١٩٤) وأما أن يحدث د، أَ، أً، بٌّ.

(١٩٥) وأما أن يحدث د، أَ، أً، جٌّ.

(١٩٦) وأما أن يحدث د، أَ، أً، دٌّ.

(١٩٧) وأما أن يحدث د، أَ، بً، أٌّ.

(١٩٨) وأما أن يحدث د، أَ، بً، بٌّ.

(١٩٩) وأما أن يحدث د، أَ، بً، جٌّ.

(٢٠٠) وأما أن يحدث د، أَ، بً، دٌّ.

(٢٠١) وأما أن يحدث د، أَ، جً، أٌّ.

(٢٠٢) وأما أن يحدث د، أَ، جً، بٌّ.

(٢٠٣) وأما أن يحدث د، أَ، جً، جٌّ.

(٢٠٤) وأما أن يحدث د، أَ، جً، دٌّ.

(٢٠٥) وأما أن يحدث د، أ، دً، أٌ.

(٢٠٦) وأما أن يحدث د، أ، دً، بٌ.

(٢٠٧) وأما أن يحدث د، أ، دً، جٌ.

(٢٠٨) وأما أن يحدث د، أ، دً، دٌ.

(٢٠٩) وأما أن يحدث د، بَ، أً، أٌ.

(٢١٠) وأما أن يحدث د، بَ، أً، بٌ.

(٢١١) وأما أن يحدث د، بَ، أً، جٌ.

(٢٢١) وأما أن يحدث د، بَ، أً، دٌ.

(٢١٣) وأما أن يحدث د، بَ، بً، أٌ.

(٢١٤) وأما أن يحدث د، بَ، بً، بٌ.

(٢١٥) وأما أن يحدث د، بَ، بً، جٌ.

(٢١٦) وأما أن يحدث د، بَ، بً، دٌ.

(٢١٧) وأما أن يحدث د، بَ، جً، أٌ.

(٢١٨) وأما أن يحدث د، بَ، جً، بٌ.

(٢١٩) وأما أن يحدث د، بَ، جً، جٌ.

(٢٢٠) وأما أن يحدث د، بَ، جً، دٌ.

(٢٢١) وأما أن يحدث د، بَ، دً، أٌ.

(٢٢٢) وأما أن يحدث د، بَ، دً، بٌ.

(٢٢٣) وأما أن يحدث د، بَ، دً، جٌ.

(٢٢٤) وأما أن يحدث د، بَ، دً، دٌ.

(٢٢٥) وأما أن يحدث د، جَ، أً، أٌ.

(٢٢٦) وأما أن يحدث د، جَ، أً، بٌ.

(٢٢٧) وأما أن يحدث د، جَ، أً، جٌ.

(٢٢٨) وأما أن يحدث د، جَ، أً، دٌ.

(٢٢٩) وأما أن يحدث د، جَ، بً، أٌ.

(٢٣٠) وأما أن يحدث د، جَ، بً، بٌ.

(٢٣١) وأما أن يحدث د، جَ، بً، جٌ.

(٢٣٢) وأما أن يحدث د، جَ، بً، دٌ.

(٢٣٣) وأما أن يحدث د، جَ، جً، أٌ.

(٢٣٤) وأما أن يحدث د، جَ، جً، بٌ.

(٢٣٥) وأما أن يحدث د، جَ، جً، جٌ.

(٢٣٦) وأما أن يحدث د، جَ، جً، دٌ.

(٢٣٧) وأما أن يحدث د، جَ، دً، أٌ.

(٢٣٨) وأما أن يحدث د، جَ، دً، بٌ.

(٢٣٩) وأما أن يحدث د، جَ، دً، جٌ.

(٢٤٠) وأما أن يحدث د، جَ، دً، دٌ.

(٢٤١) وأما أن يحدث د، دَ، أً، أٌ.

(٢٤٢) وأما أن يحدث د، دَ، أً، بٌ.

(٢٤٣) وأما أن يحدث د، دَ، أً، جٌ.

(٢٤٤) وأما أن يحدث د، دَ، أً، دٌ.

(٢٤٥) وأما أن يحدث د، د، بً، أٌ.

(٢٤٦) وأما أن يحدث د، دَ، بً، بٌ.

(٢٤٧) وأما أن يحدث د، دَ، بً، جٌ.

(٢٤٨) وأما أن يحدث د، دَ، بً، دٌ.

(٢٤٩) وأما أن يحدث د، دَ، جً، أً.
(٢٥٠) وأما أن يحدث د، دَ، جً، بً.
(٢٥١) وأما أن يحدث د، دَ، جً، جً.
(٢٥٢) وأما أن يحدث د، دَ، جً، دً.
(٢٥٣) وأما أن يحدث د، دَ، دً، أً.
(٢٥٤) وأما أن يحدث د، دَ، دً، بً.
(٢٥٥) وأما أن يحدث د، دَ، دً، جً.
(٢٥٦) وأما أن يحدث د، دَ، دً، دً.

يُلاحظ هنا أن المجموع الكلي لعدد أطراف العلم الأجمالي في حالة كون الرواة أربعة، وكون أحتمال صدق كل واحد يساوي $\frac{٣}{٤}$ عبارة عن «٢٥٦» طرفاً، كما يلاحظ أيضا أن الأطراف، التي هي في صالح الصدق عبارة عن «٨١» طرفاً من المجموع الكلي لأطراف العلم الأجمالي، وهذا يتطابق تماماً مع بديهية الأتصال، حيث أن البديهية تقول أن أحتمال صدق الرواة معاً، الذي يعني صدق الرواية يساوي حاصل ضرب أحتمال صدق الأول في صدق الثاني على تقدير صدق الأول في صدق الثالث على تقدير صدق الأولين في صدق الرابع على تقدير صدق الثلاثة، أي: أن نضرب: $\frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٨١}{٢٥٦}$

والتعريف الأجمالي يقول أن أحتمال صدق الرواية يساوي:

عدد الأطـراف الـتي تلازم الصـــدق
———————————
المجموع الكلي لأطراف العلم الأجمالي

وعدد الأطراف التي تلازم الصدق «٨١»، والمجموع الكلي لأطراف العلم الأجمالي «٢٥٦».

ويكون أحتمال الصدق حينئذ = $\frac{٨١}{٢٥٦}$

التعريف والمثال الرابع:

كانت لدينا عشر كرات، نصفها أحمر، والنصف الأخر أخضر، وأردنا أن نسحب منها كرتين، فما هي درجة أحتمال أن يكونا حمراوين؟

ولأجل أن نوضح أنطباق التعريف على هذا المثال بشكلٍ كامل، نفترض أن الكـرات مرقمة من ١ ← ١٠، وأن الكرات من ١← ٥ هي الحمراء، والكرات من ٦ ← ١٠ هي الخضراء.

نُلاحظ هنا أن خروج الكرتين يقيناً من بين الكرات العشرة يتردد بين «٩٠» صورة، أي أن للعلم الأجمالي بخروج كرتين «٩٠» طرفاً. وذلك لأن الكرتين الخارجتين يمكن أن تخرجا حسب الترتيب ضمن الصور التالية:

(١) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٢».

(٢) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٣».

(٣) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٤».

(٤) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٥».

(٥) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٦».

(٦) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٧».

(٧) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٨».

(٨) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٩».

(٩) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١٠».

(١٠) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٢»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١».

(١١) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٢»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٣».

(١٢) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٢»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٤».

(١٣) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٢»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٥».

(١٤) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٢»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٦».

(١٥) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٢»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٧».

(١٦) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٢»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٨».

(١٧) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٢»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٩».

(١٨) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٢»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١٠».

(١٩) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٣»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١».

(٢٠) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٣»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٢».

(٢١) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٣»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٤».

(٢٢) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٣»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٥».

(٢٣) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٣»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٦».

(٢٤) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٣»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٧».

(٢٥) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٣»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٨».

(٢٦) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٣»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٩».

(٢٧) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٣»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١٠».

(٢٨) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٤»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١».

(٢٩) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٤»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٢».

(٣٠) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٤»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٣».

(٣١) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٤»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٥».

(٣٢) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٤»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٦».

(٣٣) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٤»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٧».

(٣٤) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٤»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٨».

(٣٥) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٤»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٩».

(٣٦) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٤»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١٠».

(٣٧) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٥»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١».

(٣٨) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٥»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٢».

(٣٩) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٥»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٣».

(٤٠) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٥»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٤».

(٤١) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٥»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٦».

(٤٢) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٥»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٧».

(٤٣) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٥»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٨».

(٤٤) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٥»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٩».

(٤٥) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٥»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١٠».

(٤٦) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٦»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١».

(٤٧) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٦»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٢».

(٤٨) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٦»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٣».

(٤٩) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٦»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٤».

(٥٠) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٦»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٥».

(٥١) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٦»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٧».

(٥٢) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٦»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٨».

(٥٣) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٦»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٩».

(٥٤) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٦»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١٠».

(٥٥) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٧»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١».

(٥٦) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٧»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٢».

(٥٧) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٧»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٣».

(٥٨) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٧»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٤».

(٥٩) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٧»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٥».

(٦٠) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٧»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٦».

(٦١) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٧»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٨».

(٦٢) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٧»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٩».

(٦٣) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٧»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١٠».

(٦٤) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٨»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١».

(٦٥) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٨»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٢».

(٦٦) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٨»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٣».

(٦٧) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٨»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٤».

(٦٨) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٨»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٥».

(٦٩) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٨»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٦».

(٧٠) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٨»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٧».

(٧١) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٨»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٩».

(٧٢) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٨»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١٠».

(٧٣) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٩»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١».

(٧٤) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٩»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٢».

(٧٥) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٩»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٣».

(٧٦) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٩»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٤».

(٧٧) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٩»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٥».

(٧٨) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٩»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٦».

(٧٩) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٩»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٧».

(٨٠) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٩»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٨».

(٨١) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «٩»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١٠».

(٨٢) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١٠»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «١».

(٨٣) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١٠»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٢».

(٨٤) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١٠»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٣».

(٨٥) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١٠»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٤».

(٨٦) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١٠»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٥».

(٨٧) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١٠»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٦».

(٨٨) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١٠»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٧».

(٨٩) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١٠»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٨».

(٩٠) أن تخرج الكرة الأولى وهي تحمل الرقم «١٠»، وتخرج الثانية وتحمل رقم «٩».

أذن مجموعة أطراف العلم الأجمالي - في هذا المقام - تساوي «٩٠» طرفاً.

ولكن ما هو عدد الأطراف الذي يلازم خروج كرتين حمراوين؟

نحن قد أفترضنا أن الكرات الحمراء هي الكرات من ١ ← ٥ وحينما نراجع الأطراف والصور المتقدمة، نجد أن الأطراف التي تكون كرتاها حمراوين هي «٢٠» طرفاً.

ويجب أن نُلاحظ هنا أننا سواء أفترضنا أن الكرات الحمراء هي الكرات من ١ ← ٥ أم أفترضنا غيرها يبقى عدد الأطراف الذي يلازم خروج كرتين حمراوين يساوي «٢٠».

أذن: درجة أحتمال خروج كرتين حمراوين وفق التعريف الأجمالي =

$$\frac{\text{عدد الأطراف الذي يُلازم خروج كرتين حمراوين}}{\text{المجموع الكلي لأطراف العلم الأجمالي}}$$

$= \frac{٢٠}{٩٠} = \frac{٢}{٩}$ ، وهو مطابق تماماً لما تم حسابه في ضوء بديهية الأتصال في المثال الرابع.

التعريف والمثال الخامس :

المثال الخامس هو عين المثال الرابع، حيث نسحب كرتين من بين عشر كرات خمس منها حمراء والخمس الأخرى خضراء، ولكن المطلوب أثباته في هذا المثال هو أستخراج أحتمال أن تكون أحدى الكرتين ـ على الأقل ـ حمراء.

يُلاحظ هنا أن العلم الأجمالي في هذا المثال هو عين عدد أطراف العلم الأجمالي في المثال السابق، فالصور المحتملة لخروج كرتين عبارة عن «٩٠» صورة.

وحينما نُراجع جدول أطراف العلم الأجمالي، الذي رسمناه في المثال السابق نلاحظ أن الأطراف التي تلازم خروج أحدى الكرتين حمراء تساوي «٧٠» طرفاً.

وعلى أساس التعريف الأجمالي تكون قيمة أحتمال خروج أحدى الكرتين حمراء = $\frac{٧٠}{٩٠}$ = $\frac{٧}{٩}$.

وهذه النسبة مطابقة تماماً لما تمّ استنتاجه في المثال الخامس على اساس بديهية الأنفصال.

ألتعريف والمثال السادس :

كانت لدينا حقيبتان تحتوي كل واحدة منها على عشر كرات، وكانت خمس كرات من الحقيبة الأولى زرقاء وخمس كرات صفراء، كما كانت ست كرات من الحقيبة الثانية زرقاء وأربع كرات منها صفراء، وسحبنا

من كل حقيبة كرة واحدة، فما هي قيمة أحتمال أن تخرج أحدى الكرتين ـ على الاقل ـ زرقاء؟

وبغية أيضاح التطابق بين المثال والتعريف الأجمالي للأحتمال نُرقم كرات الحقيبة الأولى من ١ ← ١٠، ونفترض أن الكرات من ١ ← ٥ زرقاء، وأن الكرات من ٦ ← ١٠ صفراء.كما نُرقم كرات الحقيبة الثانية من ١/ ← ١٠/ ونفترض أن الكرات من ١/ ← ٦/ زرقاء، وأن الكرات من ٧/ ← ١٠/ صفراء.

وحينما نسحب كرة من كل حقيبة فسوف نواجه علماً اجمالياً مؤلفاً من «١٠٠» طرفاً، وذلك لأن الصور الممكنة لسحب كرة من كل حقيبة عبارة عن:

(١) أن تخرج الكرة رقم «١» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١/» من الحقيبة الثانية.

(٢) أن تخرج الكرة رقم «١» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٢/» من الحقيبة الثانية.

(٣) أن تخرج الكرة رقم «١» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٣/» من الحقيبة الثانية.

(٤) أن تخرج الكرة رقم «١» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٤/» من الحقيبة الثانية.

(٥) أن تخرج الكرة رقم «١» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٥/» من الحقيبة الثانية.

(٦) أن تخرج الكرة رقم «١» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٦/» من الحقيبة الثانية.

(٧) أن تخرج الكرة رقم «١» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٧/» من الحقيبة الثانية.

(٨) أن تخرج الكرة رقم «١» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٨/» من الحقيبة الثانية.

(٩) أن تخرج الكرة رقم «١» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٩/» من الحقيبة الثانية.

(١٠) أن تخرج الكـرة رقم «١» من الحقيبـة الأولى، والكرة رقم «١٠/» من الحقيبة الثانية.

(١١) أن تخرج الكرة رقم «٢» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١/» من الحقيبة الثانية.

(١٢) أن تخرج الكرة رقم «٢» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٢/» من الحقيبة الثانية.

(١٣) أن تخرج الكرة رقم «٢» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٣/» من الحقيبة الثانية.

(١٤) أن تخرج الكرة رقم «٢» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٤/» من الحقيبة الثانية.

(١٥) أن تخرج الكرة رقم «٢» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٥/» من الحقيبة الثانية.

(١٦) أن تخرج الكرة رقم «٢» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٦/» من الحقيبة الثانية.

(١٧) أن تخرج الكرة رقم «٢» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٧/» من الحقيبة الثانية.

(١٨) أن تخرج الكرة رقم «٢» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٨/» من الحقيبة الثانية.

(١٩) أن تخرج الكرة رقم «٢» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٩/» من الحقيبة الثانية.

(٢٠) أن تخرج الكرة رقم «٢» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١٠/» من الحقيبة الثانية.

(٢١) أن تخرج الكرة رقم «٣» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١/» من الحقيبة الثانية.

(٢٢) أن تخرج الكرة رقم «٣» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٢/» من الحقيبة الثانية.

(٢٣) أن تخرج الكرة رقم «٣» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٣/» من الحقيبة الثانية.

(٢٤) أن تخرج الكرة رقم «٣» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٤/» من الحقيبة الثانية.

(٢٥) أن تخرج الكرة رقم «٣» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٥/» من الحقيبة الثانية.

(٢٦) أن تخرج الكرة رقم «٣» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٦/» من الحقيبة الثانية.

(٢٧) أن تخرج الكرة رقم «٣» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٧/» من الحقيبة الثانية.

(٢٨) أن تخرج الكرة رقم «٣» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٨/» من الحقيبة الثانية.

(٢٩) أن تخرج الكرة رقم «٣» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٩/» من الحقيبة الثانية.

(٣٠) أن تخرج الكرة رقم «٣» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١٠/» من الحقيبة الثانية.

(٣١) أن تخرج الكرة رقم «٤» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١/» من الحقيبة الثانية.

(٣٢) أن تخرج الكرة رقم «٤» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٢/» من الحقيبة الثانية.

(٣٣) أن تخرج الكرة رقم «٤» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٣/» من الحقيبة الثانية.

(٣٤) أن تخرج الكرة رقم «٤» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٤/» من الحقيبة الثانية.

(٣٥) أن تخرج الكرة رقم «٤» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٥/» من الحقيبة الثانية.

(٣٦) أن تخرج الكرة رقم «٤» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٦/» من الحقيبة الثانية.

(٣٧) أن تخرج الكرة رقم «٤» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٧/» من الحقيبة الثانية.

(٣٨) أن تخرج الكرة رقم «٤» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٨/» من الحقيبة الثانية.

(٣٩) أن تخرج الكرة رقم «٤» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٩/» من الحقيبة الثانية.

(٤٠) أن تخرج الكرة رقم «٤» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١٠/» من الحقيبة الثانية.

(٤١) أن تخرج الكرة رقم «٥» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١/» من الحقيبة الثانية.

(٤٢) أن تخرج الكرة رقم «٥» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٢/» من الحقيبة الثانية.

(٤٣) أن تخرج الكرة رقم «٥» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٣/» من الحقيبة الثانية.

(٤٤) أن تخرج الكرة رقم «٥» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٤/» من الحقيبة الثانية.

(٤٥) أن تخرج الكرة رقم «٥» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٥/» من الحقيبة الثانية.

(٤٦) أن تخرج الكرة رقم «٥» من الحقيقة الأولى، والكرة رقم «٦/» من الحقيقة الثانية.

(٤٧) أن تخرج الكرة رقم «٥» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٧/» من الحقيبة الثانية.

(٤٨) أن تخرج الكرة رقم «٥» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٨/» من الحقيبة الثانية.

(٤٩) أن تخرج الكرة رقم «٥» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٩/» من الحقيبة الثانية.

(٥٠) أن تخرج الكـرة رقم «٥» من الحقيبـة الأولى، والكرة رقم «١٠/» من الحقيبة الثانية.

(٥١) أن تخرج الكرة رقم «٦» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١/» من الحقيبة الثانية.

(٥٢) أن تخرج الكرة رقم «٦» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٢/» من الحقيبة الثانية.

(٥٣) أن تخرج الكرة رقم «٦» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٣/» من الحقيبة الثانية.

(٥٤) أن تخرج الكرة رقم «٦» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٤/» من الحقيبة الثانية.

(٥٥) أن تخرج الكرة رقم «٦» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٥/» من الحقيبة الثانية.

(٥٦) أن تخرج الكرة رقم «٦» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٦/» من الحقيبة الثانية.

(٥٧) أن تخرج الكرة رقم «٦» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٧/» من الحقيبة الثانية.

(٥٨) أن تخرج الكرة رقم «٦» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٨/» من الحقيبة الثانية.

(٥٩) أن تخرج الكرة رقم «٦» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٩/» من الحقيبة الثانية.

(٦٠) أن تخرج الكـرة رقم «٦» من الحقيبـة الأولى، والكرة رقم «١٠/» من الحقيبة الثانية.

(٦١) أن تخرج الكرة رقم «٧» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١/» من الحقيبة الثانية.

(٦٢) أن تخرج الكرة رقم «٧» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٢/» من الحقيبة الثانية.

(٦٣) أن تخرج الكرة رقم «٧» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٣/» من الحقيبة الثانية.

(٦٤) أن تخرج الكرة رقم «٧» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٤/» من الحقيبة الثانية.

(٦٥) أن تخرج الكرة رقم «٧» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٥/» من الحقيبة الثانية.

(٦٦) أن تخرج الكرة رقم «٧» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٦/» من الحقيبة الثانية.

(٦٧) أن تخرج الكرة رقم «٧» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٧/» من الحقيبة الثانية.

(٦٨) أن تخرج الكرة رقم «٧» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٨/» من الحقيبة الثانية.

(٦٩) أن تخرج الكرة رقم «٧» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٩/» من الحقيبة الثانية.

(٧٠) أن تخرج الكرة رقم «٧» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١٠/» من الحقيبة الثانية.

(٧١) أن تخرج الكرة رقم «٨» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١/» من الحقيبة الثانية.

(٧٢) أن تخرج الكرة رقم «٨» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٢/» من الحقيبة الثانية.

(٧٣) أن تخرج الكرة رقم «٨» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٣/» من الحقيبة الثانية.

(٧٤) أن تخرج الكرة رقم «٨» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٤/» من الحقيبة الثانية.

(٧٥) أن تخرج الكرة رقم «٨» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٥/» من الحقيبة الثانية.

(٧٦) أن تخرج الكرة رقم «٨» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٦/» من الحقيبة الثانية.

(٧٧) أن تخرج الكرة رقم «٨» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٧/» من الحقيبة الثانية.

(٧٨) أن تخرج الكرة رقم «٨» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٨/» من الحقيبة الثانية.

(٧٩) أن تخرج الكرة رقم «٨» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٩/» من الحقيبة الثانية.

(٨٠) أن تخرج الكرة رقم «٨» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١٠/» من الحقيبة الثانية.

(٨١) أن تخرج الكرة رقم «٩» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١/» من الحقيبة الثانية.

(٨٢) أن تخرج الكرة رقم «٩» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٢/» من الحقيبة الثانية.

(٨٣) أن تخرج الكرة رقم «٩» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٣/» من الحقيبة الثانية.

(٨٤) أن تخرج الكرة رقم «٩» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٤/» من الحقيبة الثانية.

(٨٥) أن تخرج الكرة رقم «٩» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٥/» من الحقيبة الثانية.

(٨٦) أن تخرج الكرة رقم «٩» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٦/» من الحقيبة الثانية.

(٨٧) أن تخرج الكرة رقم «٩» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٧/» من الحقيبة الثانية.

(٨٨) أن تخرج الكرة رقم «٩» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٨/» من الحقيبة الثانية.

(٨٩) أن تخرج الكرة رقم «٩» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٩/» من الحقيبة الثانية.

(٩٠) أن تخرج الكرة رقم «٩» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١٠/» من الحقيبة الثانية.

(٩١) أن تخرج الكرة رقم «١٠» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١/» من الحقيبة الثانية.

(٩٢) أن تخرج الكرة رقم «١٠» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٢/» من الحقيبة الثانية.

(٩٣) أن تخرج الكرة رقم «١٠» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٣/» من الحقيبة الثانية.

(٩٤) أن تخرج الكرة رقم «١٠» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٤/» من الحقيبة الثانية.

(٩٥) أن تخرج الكرة رقم «١٠» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٥/» من الحقيبة الثانية.

(٩٦) أن تخرج الكرة رقم «١٠» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٦/» من الحقيبة الثانية.

(٩٧) أن تخرج الكرة رقم «١٠» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٧/» من الحقيبة الثانية.

(٩٨) أن تخرج الكرة رقم «١٠» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٨/» من الحقيبة الثانية.

(٩٩) أن تخرج الكرة رقم «١٠» من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «٩/» من الحقيبة الثانية.

(١٠٠) أن تخرج الكرة رقم « ١٠ » من الحقيبة الأولى، والكرة رقم «١٠/» من الحقيبة الثانية.

يُلاحظ أن مجموع الأطراف التي تلازم خروج أحدى الكرتيَن ـ على الأقل ـ زرقاء عبارة عن «٨٠» طرفاً.

وبما أن التعريف الأجمالي للأحتمال يقرر ان قيمة أحتمال الحادثة =

$$\frac{\text{مجموع الأطراف التي تلازمها}}{\text{المجموع الكلي لأطراف العلم الاجمالي}}$$

يضحى أحتمال خروج أحدى الكرتيَن زرقاء = $\frac{٨٠}{١٠٠}$ = $\frac{٨}{١٠}$

وهذه النتيجة مطابقة تماماً لما تم أستنتاجه في ضوء بديهية الأنفصال.

التعريف والمثال السابع:

حينما نلاحظ أحتمال أصابة الرامي الأول للهدف، الذي حددناه بنسبة $\frac{٨٠}{١٠٠}$ نجد أن هناك مائة عامل مؤثر على تصويب الرامي، وأن ثمانين منها في صالح اصابة الهدف. وفي هذه الحالة يتكون لدينا علم أجمالي، له مائة طرف، وثمانون من هذه الأطراف في صالح أصابة الهدف.

وحينما نُلاحظ أحتمال أصابة الرامي الثاني للهدف الذي افترضناه أيضاً، $\frac{٧٠}{١٠٠}$ نجد أن هناك مائة عامل مؤثر على تصويب الرامي أيضاً، وأن سبعين منها في صالح أصابة الهدف. وفي هذه الحالة يتكون لدينا علم أجمالي، له مائة طرف، وسبعون طرفاً من هذه الأطراف في صالح أصابة الهدف.

ولكن أذا أطَلق كِلا الراميين طلقة نحو الهدف فسوف يحصل لدينا علم أجمالي جديد أوسع وأكثر صوراً منالعلميَن السابقيَن، لأننا أذا رمزنا الى العوامل المؤثرة على تصويب الرامي الأول بالأرقام ١ ← ١٠٠، ورمزنا الى العوامل المؤثرة على تصويب الرامي الثاني بالأرقام١ /←١٠٠ /، فسوف نواجه «١٠٠٠٠» صورة. و أذا أردنا أن نتعرف بدقة ووضوح على الصور التي تلازم أصابة أحد الراميَن الهدف، فعلينا أن نختار «٨٠» رقماً من المائة الأولى و «٧٠» رقماً من المائة الثانية، وسوف نجد أن الأطراف التي تلازم أصابة أحد الراميَن ـ على الأقل ـ للهدف عبارة عن «٩٤٠٠» طرفاً، ومن

ثمّ يكون أحتمال أصابة أحد الراميين للهدف عبارة عن:

$$\frac{٩٤٠٠}{١٠٠٠٠} = \frac{٩٤}{١٠٠}$$

وهذه النتيجة مطابقة تماماً لما تمّ أستنتاجه في المثال السابع أستنتاجاً رياضياً.

التعريف والمثال الثامن:

يقول المثال الثامن أن أحتمال جلوس القائد في السيارة اليسارية [على يسار الرامي] يساوي $\frac{٩}{١٠}$ ، وأن أحتمال أصابة الرامي للهدف يساوي $\frac{٩}{١٠}$ ، فأذا أستهدف الرامي السيارة اليسارية، وعلمنا بقتل القائد، فسوف يزداد أحتمال جلوس القائد في السيارة اليسارية ، ويصبح $\frac{٨١}{٨٢}$ بدلاً من $\frac{٩}{١٠}$.

ونحن حينما نلاحظ أحتمال جلوس القائد في السيارة اليسارية نجد أن لدينا علماً اجمالياً مؤلفاً من عشرة أطراف، تسعة أطراف منه في صالح ركوب القائد في السيارة اليسارية وطرف واحد منه في صالح ركوب القائد في السيارة اليمينية. ولنرمز الى أطراف هذا العلم الأجمالي بـ [١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠]، ونفترض أن الطرف العاشر هو العامل النافي لركوب القائد في السيارة اليسارية.

وحينما نلاحظ أحتمال أصابة الرامي للهدف نجد علماً اجمالياً آخر مؤلفاً من عشرة أطراف أيضاً، تسعة منها في صالح الأصابة وواحد فقط في صالح نفيها، ولنرمز الى أطراف هذا العلم الأجمالي بـ [10,9,8,7,6,5,4,3,2,1 -]، ونفترض أن الطرف «10» سو عامل نفي أصابة الهدف.

وحينها يستهدف الرامي السيارة اليسارية سنواجه علمًا أجمالياً مؤلفاً من «١٠٠» طرف، لاننا سوف نعلم بأحدى الحالات التالية:

(١) أن يحدث العامل ١ والعامل 1.

(٢) أن يحدث العامل ١ والعامل 2.

(٣) أن يحدث العامل ١ والعامل 3.

(٤) أن يحدث العامل ١ والعامل 4.

(٥) أن يحدث العامل ١ والعامل 5.

(٦) أن يحدث العامل ١ والعامل 6.

(٧) أن يحدث العامل ١ والعامل 7.

(٨) أن يحدث العامل ١ والعامل 8.

(٩) أن يحدث العامل ١ والعامل 9.

(١٠) أن يحدث العامل ١ والعامل 10.

(١١) أن يحدث العامل ٢ والعامل 1.

(١٢) أن يحدث العامل ٢ والعامل 2.

(١٣) أن يحدث العامل ٢ والعامل 3.

(١٤) أن يحدث العامل ٢ والعامل 4.

(١٥) أن يحدث العامل ٢ والعامل 5.

(١٦) أن يحدث العامل ٢ والعامل 6.

(١٧) أن يحدث العامل ٢ والعامل 7.

(١٨) أن يحدث العامل ٢ والعامل 8.

(١٩) أن يحدث العامل ٢ والعامل 9.

(٢٠) أن يحدث العامل ٢ والعامل 10 .
(٢١) أن يحدث العامل ٣ والعامل 1 .
(٢٢) أن يحدث العامل ٣ والعامل 2 .
(٢٣) أن يحدث العامل ٣ والعامل 3 .
(٢٤) أن يحدث العامل ٣ والعامل 4 .
(٢٥) أن يحدث العامل ٣ والعامل 5 .
(٢٦) أن يحدث العامل ٣ والعامل 6 .
(٢٧) أن يحدث العامل ٣ والعامل 7 .
(٢٨) أن يحدث العامل ٣ والعامل 8 .
(٢٩) أن يحدث العامل ٣ والعامل 9 .
(٣٠) أن يحدث العامل ٣ والعامل 10 .
(٣١) أن يحدث العامل ٤ والعامل 1 .
(٣٢) أن يحدث العامل ٤ والعامل 2 .
(٣٣) أن يحدث العامل ٤ والعامل 3 .
(٣٤) أن يحدث العامل ٤ والعامل 4 .
(٣٥) أن يحدث العامل ٤ والعامل 5 .
(٣٦) أن يحدث العامل ٤ والعامل 6 .
(٣٧) أن يحدث العامل ٤ والعامل 7 .
(٣٨) أن يحدث العامل ٤ والعامل 8 .
(٣٩) أن يحدث العامل ٤ والعامل 9 .
(٤٠) أن يحدث العامل ٤ والعامل 10 .

(٤١) أن يحدث العامل ٥ والعامل 1 .

(٤٢) أن يحدث العامل ٥ والعامل 2 .

(٤٣) أن يحدث العامل ٥ والعامل 3 .

(٤٤) أن يحدث العامل ٥ والعامل 4 .

(٤٥) أن يحدث العامل ٥ والعامل 5 .

(٤٦) أن يحدث العامل ٥ والعامل 6 .

(٤٧) أن يحدث العامل ٥ والعامل 7 .

(٤٨) أن يحدث العامل ٥ والعامل 8 .

(٤٩) أن يحدث العامل ٥ والعامل 9 .

(٥٠) أن يحدث العامل ٥ والعامل 10 .

(٥١) أن يحدث العامل ٦ والعامل 1 .

(٥٢) أن يحدث العامل ٦ والعامل 2 .

(٥٣) أن يحدث العامل ٦ والعامل 3 .

(٥٤) أن يحدث العامل ٦ والعامل 4 .

(٥٥) أن يحدث العامل ٦ والعامل 5 .

(٥٦) أن يحدث العامل ٦ والعامل 6 .

(٥٧) أن يحدث العامل ٦ والعامل 7 .

(٥٨) أن يحدث العامل ٦ والعامل 8 .

(٥٩) أن يحدث العامل ٦ والعامل 9 .

(٦٠) أن يحدث العامل ٦ والعامل 10 .

(٦١) أن يحدث العامل ٧ والعامل 1 .

(٦٢) أن يحدث العامل ٧ والعامل 2 .
(٦٣) أن يحدث العامل ٧ والعامل 3 .
(٦٤) أن يحدث العامل ٧ والعامل 4 .
(٦٥) أن يحدث العامل ٧ والعامل 5 .
(٦٦) أن يحدث العامل ٧ والعامل 6 .
(٦٧) أن يحدث العامل ٧ والعامل 7 .
(٦٨) أن يحدث العامل ٧ والعامل 8 .
(٦٩) أن يحدث العامل ٧ والعامل 9 .
(٧٠) أن يحدث العامل ٧ والعامل 10 .
(٧١) أن يحدث العامل ٨ والعامل 1 .
(٧٢) أن يحدث العامل ٨ والعامل 2 .
(٧٣) أن يحدث العامل ٨ والعامل 3 .
(٧٤) أن يحدث العامل ٨ والعامل 4 .
(٧٥) أن يحدث العامل ٨ والعامل 5 .
(٧٦) أن يحدث العامل ٨ والعامل 6 .
(٧٧) أن يحدث العامل ٨ والعامل 7 .
(٧٨) أن يحدث العامل ٨ والعامل 8 .
(٧٩) أن يحدث العامل ٨ والعامل 9 .
(٨٠) أن يحدث العامل ٨ والعامل 10 .
(٨١) أن يحدث العامل ٩ والعامل 1 .
(٨٢) أن يحدث العامل ٩ والعامل 2 .

(٨٣) أن يحدث العامل ٩ والعامل 3 .

(٨٤) أن يحدث العامل ٩ والعامل 4 .

(٨٥) أن يحدث العامل ٩ والعامل 5 .

(٨٦) أن يحدث العامل ٩ والعامل 6 .

(٨٧) أن يحدث العامل ٩ والعامل 7 .

(٨٨) أن يحدث العامل ٩ والعامل 8 .

(٨٩) أن يحدث العامل ٩ والعامل 9 .

(٩٠) أن يحدث العامل ٩ والعامل 10 .

(٩١) أن يحدث العامل ١٠ والعامل 1 .

(٩٢) أن يحدث العامل ١٠ والعامل 2 .

(٩٣) أن يحدث العامل ١٠ والعامل 3 .

(٩٤) أن يحدث العامل ١٠ والعامل 4 .

(٩٥) أن يحدث العامل ١٠ والعامل 5 .

(٩٦) أن يحدث العامل ١٠ والعامل 6 .

(٩٧) أن يحدث العامل ١٠ والعامل 7 .

(٩٨) أن يحدث العامل ١٠ والعامل 8 .

(٩٩) أن يحدث العامل ١٠ والعامل 9 .

(١٠٠) أن يحدث العامل ١٠ والعامل 10 .

وأذا أردنا أن نتعرف على قيمة أحتمال أن يصيب الرامي الهدف ويركب القائد السيارة اليسارية نجد أن «٨١» طرفاً من أطراف العلم الأجمالي في صالح الأصابة وركوب القائد السيارة اليسارية معاً. وهي عبارة

عن الأطراف التي تخلو من الرقمين «١٠» و «10 ». فتكون قيمة أحتمال الأصابة وركـوب القائد السيارة اليساريه عبارة عن $\frac{٨١}{١٠٠}$ وفقاً للتعـريف الأجمالي، وهي مطابقة تماماً مع حساب قيمة أحتمال ذلك وفقاً لبديهية الأتصال.

ولكن أذا تيقنّا من أصابة القائد فسوف نواجه علماً أجمالياً جديداً، يتـألف من «٨٢» طرفـاً. أي سينتفي ثمانية عشر طرفاً من أطراف العلم الاجمالي السابق، بحكم اليقين باصابة القائد.

ايضاح ذلك: أننا بعد علمنا بأصأبة القائد سوف ينتفي أحتمال ان الرامي لم يصب السيارة اليسـارية (الهدف)، وأن القائد يركب السيارة اليسـارية. وهذا الأحتمال تمثله الأطراف التالية: الطرف ١٠، ٢٠، ٣٠، ٤٠، ٥٠، ٦٠، ٧٠، ٨٠، ٩٠. وهذه تسعة أطراف سنتيقن بعدمها بعد العلم بقتل القائد.

كما أننا بعد العلم بقتل القائد سوف ينتفي لدينا أحتمال أن القائد يركب السيارة اليمينية وان الطلقة أصابت السيارة اليسارية، وهذا الأحتمال تمثله الأطراف التالية: ٩١، ٩٢، ٩٣، ٩٤، ٩٥، ٩٦، ٩٧، ٩٨، ٩٩. وهذ تسعة أطراف أخرى سنتيقن بعدمها بعد العلم بقتل القائد.

أذن سنواجه علماً اجمالياً ـ بعد العلم بقتل القائد ـ مؤلفاً من «٨٢» طرفاً، وطرف واحد فقط، وهو الطرف الأخير في صالح ركوب القائد في السيارة اليمينية، أمّـا الأطراف الأخرى وهي «٨١» طرفاً فهي في صالح ركوب القائد في السيارة اليسارية.

وحينما نحاول تحديد قيمة أحتمال ركوب القائد في السيارة اليسارية - بعد العلم بقتل القائد - وفقاً للتعريف الأجمالي نجده مساوياً لـ:

$$\frac{\text{عدد الأطراف التي تلازم ركوب القائد في السيارة اليسارية}}{\text{المجموع الكلي لعدد أطراف العلم الأجمالي}} =$$

$\frac{٨١}{٨٢}$. وهذه النتيجة مطابقة تماماً لما تمّ أستنتاجه في ضوء مبدأ الأحتمال العكسي.

* * *

الصعوبات التي تواجه التعريف الأجمالي

هنـاك مشكلتـان رئيسيتـان تواجهـان التعريف الأجمالي، ترتبط المشكلة الاولى بالشـرط الاول من شروط سلامة التعريف، أي ضرورة أنسجـام التعـريف وعدم تورطه بتناقض داخلي، وترتبط المشكلة الثانية بشمول التعريف، أي بالشرط الثاني من شروط سلامة التعريف.

المشكلة الأولى:

يقـول التعـريف الأجمالي أن قيمة أحتمال أي قضية من القضايا تساوي عدد ما يُلازمها من أطراف الى المجموع الكلي لعدد أطراف العلم الأجمـالي. أي أن عدد الأطـراف المـلازمة يمثل بسط النسبة وعدد كل الأطراف يُمثل المقام.

لكن عدد أطراف العلم الأجمالي يمكن أن يأتي في صور متعددة، تبـعاً للاسلوب الذي نختاره في أحصاء عدد الأطراف. وفي هذا الضوء سوف تتغير قيمة المقام في النسبة التي حددنا قيمة الأحتمال على أساسها.

وعنـدئـذ تواجـه التعـريف الأجمالي المشكلة، حيث سيعجز هذا التعريف عن تحديد قيمة واحدة مشخصة للأحتمال، وسيؤدي بنا ـ التعريف الأجمالي ـ الى نتائج متباينة في تحديد قيمة الأحتمال.

أيضاح ذلك:

أفـترض أننـا كنـا نعلم بزيارة أحد الأصدقاء لنا في هذه الليلة،

والأصدقاء الذين نعلم بزيارة أحدهم لنا هم: محمد، محسن، علي. فهنا لدينا علم أجمالي، واطرافه هم (محمد، محسن، علي).

حينئذ نتساءل ونقول: ما هي قيمة أحتمال أن يزورنا «علي»؟

يمكننا أن نحدد ثلاث أجابات مختلفة على هذا الاستفهام. أي يمكننا أن نحدد ثلاث قيم مختلفة لأحتمال زيارة «علي». واليك الأجابات الثلاثة:

(١) ان العدد الكلي لأطراف العلم الأجمالي هو «٣»، وأن زيارة «علي» يُلازمها طرف واحد فقط، ومن ثمّ فاحتمال زيارة «محسن» = $\frac{١}{٣}$.

(٢) ان العدد الكلي لأطراف العلم الأجمالي هو «٢»، لأننا نعلم بزيارة صديق لنا هذه الليلة، وهذا العلم مردد بين أن يزورنا «علي» أو من أبتدأ أسمه بحرف «م». ومن هنا يضحي لدينا طرفان أحدهما زيارة علي والآخر زيارة من أبتدأ أسمه بـ «م»، ويصبح أحتمال زيارة من أبتدأ أسمه بـ «م» مساوياً لـ = $\frac{١}{٢}$ ، لأن العدد الكلي لأطراف العلم الأجمالي هو «٢»، وعدد الأطراف التي تلازم زيارة من أبتدأ أسمه بـ «م» طرف واحد.

أما أحتمال زيارة «علي» فهو يساوي $\frac{١}{٢}$ لأن المقام «العدد الكلي لأطراف العلم الأجمالي» = «٢»، والبسط «مجموع الأطراف التي تلازم القضية المحتملة» = «١».

(٣) اذا كان لدى «محمد» بدلتان، وكان لدى «محسن» بدلة واحدة، ولدى «علي» بدلة واحدة، فسوف يكون عدد أطراف العلم الأجمالي «٤» لاننا نعلم بأحدى الحالات التالية:

أ- أن يزورنا محمد وهو يلبس البدلة الأولى.

ب ـ أن يزورنا محمد وهو يلبس البدلة الثانية.

ج ـ أن يزورنا علي.

د ـ أن يزورنا محسن.

ويصبح أحتمال زيارة علي ($\frac{١}{٤}$)، لأن العدد الكلي لأطراف العلم الأجمالي «٤»، وعدد الأطراف التي تلازم زيارة «علي» هي طرف واحد.

أتضح أن الأسلوب الذي نختاره في احصاء عدد الأطراف يلعب دوراً مصيرياً في تحديد قيمة أحتمال الحادثة، وأن التعريف الأجمالي يقُدم لنا قيمًا متباينة للأحتمال، بتباين الأسلوب الذي نستخدمه في تحديد عدد اعضاء العلم الأجمالي. وهذه المشكلة سوف تقضي على التعريف الأجمالي، لان هذا التعريف يحدد قيمًا متباينة للأحتمال!

معالجة المشكلة:

أن الخطوة الأولى على طريق معالجة المشكلة هي أن نتفهم بدقة منشأ المشكلة وأسبابها الحقيقية. وبغية التعرف على منشأ وأسباب المشكلة لا بد لنا من عودة الى المثال الذي تقدم عرض المشكلة من خلاله.

كان لدينا علم أجمالي بزيارة أحد الاصدقاء الثلاثة (محمد، محسن، علي)، وبصدد تعيين عدد أعضاء العلم الأجمالي كانت هناك ثلاث صور متباينة بأعتبار أفتراض أن «محمد» يملك بدلتين، بينما يملك كل من «محسن» أو «علي» بدلة واحدة.

الصورة الأولى: أن يزورنا محمد أو محسن أو علي، فيكون عدد

أطراف العلم الاجمالي ثلاثة، وتكون قيمة أحتمال أن يزورنا «علي» تساوي $\frac{١}{٣}$.

الصورة الثانية: أن يزورنا من يبدأ أسمه بـ «م» أو يزورنا «علي»، فيكون عدد أطراف العلم الأجمالي أثنين، وتكون قيمة أحتمال أن يزورنا «علي» تساوي $\frac{١}{٢}$.

الصورة الثالثة: أن يزورنا محمد وهو يلبس البدلة الاولى، أو يزورنا محمد وهو يلبس البدلة الثانية، أو يزورنا محسن، أو يزورنا علي. وفي هذه الصورة يصبح عدد أطراف العلم الاجمالي أربعة، وتصبح قيمة أحتمال أن يزورنا علي $\frac{١}{٤}$.

وحينما نتفحص هذه الصور نجد أن منشأ الاختلاف والتباين بينها ينبثق من أهمال تقسيم بعض الأطراف في صورة، وأجراء التقسيم في صورة أخرى. فقد أهملنا في الصورة الثانيه تقسيم من يبدأ أسمه بـ «م» الى محمد ومحسن. كما أجرينا في الصورة الثالثة تقسيم «محمد» الى محمد وهو يلبس البدلة الاولى، ومحمد وهو يلبس البدلة الثانية.

أذن! تنشأ المشكلة من التقسيم، فاهماله أو أجراؤه هو الذي يُغيِّر عدد أطراف العلم الأجمالي. من هنا يتعين على التعريف الأجمالي أن يحدد مقياساً موضوعياً، يتخذه كأساس لتحديد قيمة الاحتمال.

وبعبارة أخرى: يتحتم على التعريف الأجمالي ـ لكي يعالج المشكلة المتقدمة ـ أن يقف عند منشأها (أهمال التقسيم أو أجراؤه)، فيطرح أساساً نقيّم في ضوءه التقسيم، ونحكم بجوازه أو عدم جوازه، ومن ثمّ نحصل على

العدد الواقعي لأطراف العلم الأجمالي، فنحصل على قيمة واحدة لأحتمال الحدث المطلوب.

يعني: أن المشكلة السابقة نشأت جراء تقسيم بعض الأطراف، وأهمال تقسيم بعض الأطراف الأخرى. واذا أستطعنا أن نحدد مقياساً نلزم أونمنع في ضوءه التقسيم، ونحكم بلزوم التقسيم في بعض الحالات، وبعدم جوازه في حالات أخرى، فهذا يعني أننا سوف نحدد صيغة واحدة لعدد أطراف العلم الأجمالي، ومن ثمّ لا يعتمد التعريف الأجمالي الا قيمة واحدة للأحتمال.

ولكن ما هي صيغة المقياس، الذي يحدد لنا التقسيم؟

وقبل الاجابة على هذا الأستفهام علينا أيضاح مصطلحين يرتبطان بصيغة مقياس التقسيم وهما:

(١) القسم الأصلي: هو القسم الذي له تأثير على تقرير وجود المقسم.

(٢) القسم الفرعي: هو القسم الذي يتفرع على وجود المقسم، وليس له تأثير على تقرير وجود المقسم.

وحينما نرجع الى الصور المتقدمة نجد أن من يبدأ اسمه بـ «م» مقسم، وأن «محسن» و «محمد» قسمين لهذا المقسم. ونلاحظ أيضاً أن «زيارة محمد» مقسم، و «أن يزورنا محمد وهو يلبس البدلة الاولى» قسم، و «أن يزورنا محمد وهو يلبس البدلة الثانية» قسم آخر لهذا المقسم.

ونلاحظ أن «زيارة محسن» علة تامة وسبب مستقل لتحقق فرضية زيارة من يبدأ أسمه بـ «م»، كما أن «زيارة محمد» سبب مستقل أيضاً لتحقق

تلك الفرضيه. أما «أن يزورنا محمد وهو يلبس البدلة الأولى» أو «أن يزورنا محمد وهو يلبس البدلة الثانية» فقسمان ليس لها تأثير على تحقق فرضية «زيارة محمد»، أي أن لبس البدلة الأولى أو الثانية ليس سبباً وعلة لزيارة محمد. بل هذان القسمان متفرعان على وجود أصل المقسم، أي أذا أفترضنا أن يزورنا محمد فهو أما أن يلبس البدلة الأولى أو يلبس البدلة الثانية.

مقياس التقسيم:

يمكن أن نضع هذا المقياس في الصيغة التالية:

(أذا كانت الأقسام أقساماً أصلية، وجب التقسيم ولزم أرجاع المقسم الى أقسامه، وسيكون كل قسم طرفاً مستقلاً من أطراف العلم الأجمالي. وأذا كانت الأقسام أقساماً فرعية، فلا يجوز التقسيم، ألا في حالة أمكان أجراء تقسيم مناظر له في سائر الأطراف الأخرى).

المشكلة والمقياس :

اتضح لنا فيما تقدم أن المشكلة التي تواجه التعريف الأجمالي عبارة عن: أن التعريف الأجمالي يسمح بأستخدام أساليب مختلفه لتعيين عدد أعضاء مجموعة أطراف العلم الأجمالي، ومن ثمّ ينتهي بنا الى تحديد قيم متباينة للاحتمال. وأتضح لنا أيضاً أن جوهر المشكلة يكمن في أهمال التقسيم أو أجراؤه في بعض الأطراف.

وفي ضوء المقياس المتقدم سوف لا يسمح لنا التعريف الأجمالي الذي يقوم على أساس هذا المقياس، ألا بأسلوب واحد لتعيين عدد أعضاء أطراف العلم الأجمالي، ومن ثم لا تكون للأحتمال ألا قيمة واحدة، وأن

المقياس المتقدم يضع يده على جوهر المشكلة فيحدد لنا الضابط الموضوعي لأجراء التقسيم أو أهماله.

ولأجـل أن تتضح لنا كيفية معالجة المشكله على أساس المقياس المتقدم، نعود الى المثال الذي عرضنا المشكلة من خلاله، لنرى كيف نعالج المشكلة في ذلـك المثال على اساس المقياس المطروح كمصاردة وأساس التعريف الأجمالي.

كان لدينا علم أجمالي بزيارة أحد الأصدقاء الثلاثة: محسن، محمد، علي. وكانت الصور التي ذكرناها لعدد أعضاء العلم الأجمالي ثلاثة:

(١) أن يزورنا علي، أو محسن، أو محمد.

(٢) أن يزورنا علي، أو من يبدأ أسمه بـ «م».

(٣) أن يزورنا علي، أو محسن، أو محمد وهو يلبس البدلة الأولى، أو محمد وهو يلبس البدلة الثانية.

فكان عدد الأعضاء في الصورة الأولى ثلاثة، وفي الصورة الثانيه أثنين، وفي الصورة الثالثة أربعة، وكانت قيمة أحتمال أن يزورنا علي في الصورة الأولى $\frac{١}{٣}$ ، وفي الثانية $\frac{١}{٢}$ ، وفي الثالثة $\frac{١}{٤}$.

لكننـا نواجه هذه الصور المتباينة، نتيجه عدم أستخدام المقياس المتقـدم، أمـا أذا أستخدمنا المقياس كأساس يعتمده التعريف فسوف نُلاحظ أن التعريف يُعيّن لنا صورة واحدة فقط من بين الصور الثلاث، وأنه يرفض الصورة الثانية والصورة الثالثة.

الصورة الثانية ـ وفُق المقياس ـ لا بد من تقسيم الطرف الثاني فيها «من يبدأ أسمه بـ «م»» الى محسن، ومحمد، لأن محسن، ومحمد أقسام أصلية.

فترجع الصـورة الثانية الى الصورة الأولى، ويصبح عدد أطراف العلم الأجمالي ثلاثة بدلاً من اثنين. والصورة الثالثة ـ وفق المقياس ـ لا بد من أهمال تقسيم «زيارة محمد» الى: «أن يزورنا محمد وهو يلبس البدلة الأولى» و «أن يزورنا محمد وهو يلبس البدلة الثانية»، لأن هذين القسمين أقسام فرعية ،وحينئـذ ترجـع الصـورة الثالثة الى الصورة الأولى، ويبقى عدد أعضاء العلم الأجمالي ثلاثة.

المشكلة الثانية:

ترتبط هذه المشكلة ـ كما أشرنا ـ بمسألة شمول التعريف وأنطباقه على كل أحتـمال. فالتعـريف القائم على أساس مفهوم العلم الأجمالي يستوعب كل أحتمال يمكن قياسه رياضياً. وهذه صفة حسنة ومزية أيجابية، بل شرط ضروري للتعريف.

لكن هذه الصفـة الأيجـابية الضـرورية تواجه في بعض الحالات اشكالاً في تقييم درجة الأحتمال.

مثـلًا: لو واجهنا أمرأة حاملًا، وعلمنا أنها وضعت حملها، فسوف يكون لدينا علم أجمالي بأن هذه المرأة أما أن تلد مولوداً واحداً أو أنها تلد توأماً. وهذا علم أجمالي ثنائي الأطراف، وحينئذ سيكون قيمة أحتمال ولادتها توأماً « $\frac{1}{2}$ ».

لكن لدينا علماً أجمالياً آخر يقوم على أساس الأحصائيات المتكررة للولادات يفيد أن قيمـة أحتـمال ولادتهـا توأماً أقل بكثير من $\frac{1}{2}$. (ولنفترض أن نسبة أنجاب التوأم تساوي $\frac{1}{10000}$ ، أي أن الاحصاء

يُشير الى أن من بين كل «١٠٠٠٠» حالة ولادة هناك ولادة واحدة تضع فيها الحامل توأماً.

في مثل هذه الحالة يضعنا التعريف الأجمالي في مواجهة مشكلة بحكم شموله، فالتعريف الأجمالي كما يصدق على االأحتمال في ضوء العلم الأجمالي الأول، يصدق أيضاً على الأحتمال في ضوء العلم الأجمالي الثاني. وحينئذ تكون كل من القيمتيَن $\frac{١}{٢}$ و $\frac{١}{١٠٠٠٠}$ تقييماً لأحتمال ولادة المرأة توأماً على أساس التعريف الأجمالي للأحتمال.

معالجة المشكلة:

نشـأت المشكلة الثانية جرّاء وجود علميَن أجماليَن يقيّم كل منهما الأحتمال بصورة خاصة. ومع شمول التعريف لكلا العلمين نقع في صعوبة الحصول على تقييم واحد للأحتمال فكِلا الأحتمالَين مشمول للتعريف.

والحق أن المشكلة تبقى قائمة مع قيام كلا العلميَن الأجماليَن، دون أن ينحل أحدهمافي الآخر، أو دون أن يطرد أحدهما الآخر.

وحينما نتفحص المثال المتقدم نجد أن العلم الأجمالي الأول سوف يذوب في العلم الأجمالي الثاني.

أيضاح ذلك:

حينما نُلاحظ ولادات النساء نجد أن المولود أما أن يكون فرداً وأما أن يكون توأماً، فيتكون لدينا علم أجمالي بأن المولود أما أن يكون فرداً، وأما أن يكون توأماً.

وفي نفس ظروف ولادة هذا العلم الأجمالي نلاحظ أيضاً أن عوامل وأسبـاب ولادة المرأة فرداً أكبر بكثير من عوامل و اسباب ولادة المرأة توأماً. ففي كل «١٠٠٠٠» حالة هناك «٩٩٩٩» عامل لصالح ولادة المرأة فرداً، وعامل واحد فقط لصالح ولادة التوأم. من هنا يتطور العلم الأجمالي الأول وتتسع أطرافه من حالتين الى «١٠٠٠٠» حالة. ويصبح علمنا الأجمالي بولادة المرأة ذا «١٠٠٠٠» طرفاً. وبهذا يرتفع الأشكال، لأن العلم الأجمالي بولادة المرأة فرداً أو توأماً ينمو ويتطور وتصبح صورته الفعلية مكونة من «١٠٠٠٠» طرفاً.

* * *

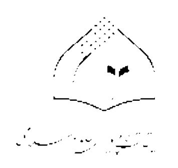
الفصل الثالث

نظرية الاحتمال «٢»

١ـ بديهيات حساب الاحتمال

٢ـ قواعد حساب الاحتمال

٣ـ التفسير الاجمالي مشكلات وحلول



الفصل الثالث
نظرية الاحتمال «٢»

١ـ بديهيات حساب الاحتمال

هنـاك أتفـاق بين البـاحثـين في نظرية الاحتمال على أن حساب الأحتمالات بشكله الرياضي ابتدأه «بسكال»[١] حيث أنتشر القمار في اوربا بين الطبقات المرفهة ابان القرن السابع عشر الميلادي. وطرح المقامرون أسئلة بشأن فرص الفوز، وكسب المقامرة، وأحتمال الربح. وقد أثارت هذه الأسئلة رجال العلم أمثال «غاليلو»، و «فرما»، و «ليبنتز»، و «بسكال» وقد حاول هؤلاء الأجابة على هذه الأسئلة وتحديد فرص الفوز وأحتمال الربح.

ولكن ما من أحد قبل «بسكال»، و «فرما» استطاع أن يقدم المباديء الأساسية والمناهج السليمة التي يمكن بها أن يخضع هذا الموضوع للتحديد الحسـابي الـدقيق. فالى هذين العـالمين من علماء الهندسة ينبغي أن نرد البدايات الأولى ـ كما يقول لابلاس ـ لعلم الاحتمالات[٢].

بدأ هذا العلم «حساب الأحتمالات» حياته في شكل رسائل متبادلة بين «بسكال» و «فرما» حول بعض المشكلات التي أثارها «شيفاليه دي مير» وهـو أحد المقامرين المحترفين، الذي كان على صلة وثيقة ببسكال، وقد

---

(١) بليز بسكال: (١٦٢٣ ـ ١٦٦٢)، فرنسي، اشتهر بحق بانه رياضي وعالم ولا هوتي وواحد من أوائل كبار كتاب النثر الفرنسيين أكثر من اشتهاره بأنه فيلسوف.

(٢) فلسفة المصادفة، محمود أمين العالم، ص ١٩٩، نقلاً عن «لابلاس».

نشرت ثلاث من هذه الرسائل (التي كتبت عام ١٦٥٤) في عام «١٦٧٩». وظـل حسـاب الاحتـمالات حتى مجيء «لابـلاس» مقصوراً على معالجة مشكلات الاحتمال في العاب الصدفة.

استقـر «حسـاب الاحتمالات» على يد «لابلاس »، حيث يعتبره مؤرخو العلم مؤسس القواعد النظرية للأحتمال، وأول من صاغ حساب الاحتمال كقواعد أقامها على نسق نظري وقد نبّه الى أهمية ودور «حساب الاحتمال » في العلوم المختلفة، دون سجنه في دائرة ألعاب الصدفة.

ثم أخـذت نظرية الاحتمال وحسابه يتطوران بشكل مذهل حتى أضحى اليوم من أوسع وأعقد ميادين الرياضة وفلسفة العلم.

وحينما يقاس أحتمال الحوادث ـ سواء بالطريقة البدائية، أم على مستـوى رياضيات بسكـال، أم تنـظير «لابـلاس »، أم على مستـوى المستجدات الرياضية المعاصرة ـ نلاحظ أن هذا القياس يعتمد وينطلق من مبادئ ومسلمات رياضية، حتى ينتهي الى قواعد ونظريات برهانية. أي: ان حساب الأحتمالات على مختلف المستويات ينطلق من بديهيات رياضية. وقد صاغ البرفسور «برود» هذه البديهيات واضعاً اياها ضمن ستة مبادئ، إلاّ أن بعض أعـلام نظرية الأحتـمال حاول أختـزال هذه البديهيات. وهذا الاختزال لا يؤثر على بداهة ما حذف، انما هو اختيار مفتوح أمام الباحث تبعـاً لتعـدد الخيارات الرياضية والطرق الحسابية التي تتبع لقياس قيمة احتمال الحوادث.

ونحن هنـا نعتمـد البـديهيات التي ذكـرهـا «برود»، تبعاً لكتاب «الأسس المنـطقية للأستقـراء»، ثم نحـاول أن نقيّم التعـريف الاجمالي للاحتمال في ضوء أنسجامه مع هذه البديهيات والمبادىء التي يرتكزعليها

«حساب الأحتمال».

أ ـ بديهيات «برود»:

البديهية الأولى: أذا كان لدينا (م، ن) فأنه توجد قيمة واحدة فقط هي $\frac{م}{ن}$ ، تعبّر عن الاحتمال «م» أذا كانت لدينا «ن».

البديهية الثانية: القيم الممكنة لـ $\frac{م}{ن}$ هي كل الأعداد الواقعة بين الصفر والواحد الصحيح، وهما من بينها.

البديهية الثالثة: اذا كانت ن تتضمن م فان $\frac{م}{ن}$ = ١، (ويستخدم الواحد للاشارة الى اليقين).

البديهية الرابعة: اذا كانت ن لا تتضمن م فان $\frac{م}{ن}$ = ٠ (ويستخدم الصفر للاشارة الى الاستحالة).

البديهية الخامسة: احتمال كل من (م) و (هـ)، اذا ما كان لدينا ن هو احتمال م بالنسبة الى ن مضروباً في أحتمال هـ بالنسبة الى م. ن، وهو أيضاً احتمال هـ بالنسبة الى ن مضروباً في احتمال $\frac{م}{هـ. ن}$ ، (وتسمى هذه ببديهية الاتصال).

البديهية السادسة: احتمال «م» أو «هـ» بالنسبة الى ن، هو احتمال م بالنسبة الى ن مضافاً اليه أحتمال هـ بالنسبة الى ن، مطروحاً منه احتمال «م» و «هـ» بالنسبه الى ن. (وتسمى هذه ببديهية الانفصال).

ب ـ التفسير الأجمالي وبديهيات برود:

التفسير الاجمالي ـ كما تقدم ـ مصطلح أطلقناه على تعريف

الاحتمال، الذي تبناه الأستاذ الشهيد، حيث أقام تفسير الاحتمال على أساس العلم الأجمالي. وبعد أن تعرفنا في الفقرة السابقة على أن الحساب الرياضي للاحتمال يرتكز على بديهيات، نحاول في هذه الفقرة أن نستوضح العلاقة بين هذه البديهيات وبين التفسير الأجمالي للأحتمال. وبعبارة أخرى: نحاول أن نتعرف على حقيقة موقع هذه البديهيات من هذا التفسير أي هل أن هذه البديهيات تصدق على هذا التفسير وتنسجم معه كمنطلق لحساب احتمال الحوادث، أم لا؟

وقبل الأجابة على هذا الاستفهام لا بد من الوقوف مرة أخرى على التفسير الأجمالي للاحتمال. حيث يقول هذا التفسير:

أنّ الأحتمال الذي يقوم تفسيره على أساس مفهوم العلم الأجمالي يمكن أن نضع تعريفه ضمن صيغتين:

١ـ أنّ الاحتمال الرياضي هو دائماً عضو في مجموعة الاحتمالات التي تتمثل في علم اجمالي، وقيمته تساوي دائماً ناتج قسمة رقم اليقين على عدد أعضاء مجموعة الاطراف التي تتمثل في ذلك العلم الاجمالي.

٢ـ ان الاحتمال الرياضي لشيء هو نسبة ما يحتله من مراكز في داخل مجموعة أطراف العلم الاجمالي الى عدد أعضاء هذه المجموعة.

فالتعريف بصيغته الأولى يعتبر الأحتمال درجة من درجات التصديق، وهذه الدرجة تساوي دائماً قسماً من اليقين، ومن ثمّ لا تبلغ اليقين، بل تبقى درجة ناقصة من درجات التصديق. وأذا أردنا أن نلاحظ مدى الانسجام بين هذه الصيغة وبين بديهيات برود نجد ما يلي:

(١) أن البديهية الثانية لا تصدق على هذا التعريف، لأنها تنص على أن الاحتمال يشمل درجة اليقين الكامل «١» ودرجة اليقين الكامل بالعدم

يعني «٠» بينما ترى الصيغة الأولى أن الأحتمال درجة من درجات التصديق الناقص، ومن ثمّ فهو جزء من اليقين، ولا يشمل اليقين بكلتا صورتيه.

(٢) أن البديهية الثالثة و الرابعة لا تصدقان أيضاً على التعريف.

أما أذا لاحظنا التعريف بصيغته الثانية نجد أنه يتلائم ويصدق على كل البديهيات التي ذكرها «برود». وما دمنا نتحدث عن علاقة بديهيات «برود» بالتفسير الاجمالي للاحتمال يحسن بنا هنا أن نشير الى ملاحظتين جوهريتين، فيما يرتبط بعلاقة البديهيات بعامةوتفسير الاحتمال:

الملاحظة الأولى:

أنّ عدد البديهيات التي يتوقف عليها حساب الاحتمال مسألة ترتبط بطبيعة الأسلوب والطريقة الرياضية التي نُريد أن نصل خلالها الى حساب قيمة أحتمال الحوادث. وحينئذ فمن الممكن أن تكون هناك طريقة يتوقف أستخدامها على «س» من البديهيات وهناك طريقة أخرى يتوقف استخدامها على «س ـ ١» أو «س ـ ٢».

والأمر كذلك بالنسبة الى بديهيات تفسير الاحتمال، حيث أن عدد البديهيات التي يستلزمها كل تفسير يرتبط كثرةً وقلةً بطبيعة التفسير المختار.

وعلى كلا التقديرين لا يؤثر حذف أو اضافه بعض المبادىء من قائمة البديهيات المفروضة على بداهة تلك البديهيات لو تمت تلك البداهة بنفسها.

الملاحظة الثانية:

إنّ التفسير الأجمالي بصيغته الأولى يقول:

«انّ الاحتمال الرياضي هو دائمًا عضو في مجموعة الاحتمالات التي تتمثل في علم اجمالي، وقيمته تساوي دائمًا ناتج قسمة رقم اليقين على عدد أعضاء مجموعة الأطراف التي تتمثل في ذلك العلم الأجمالي». ووفق هذه الصيغة لا بد من افتراض تساوي قيم كل أعضاء مجموعة الاحتمالات التي تتمثل في كل علــم اجمالي، وأن العلم الاجمالي، ينقسم بالتساوي على عدد أعضاءه.

والسر في ضرورة هذا الافتراض هو أن الصياغة الأولى للتعريف تقول: أنّ قيمة الأحتمال تحدد بقسمة رقم اليقين على عدد أعضاء مجموعة أطراف العلم الاجمالي. وبما أن كل طرف من أطراف المجموعة يستبطن احتمالاً، فهذا يعني أننا حينما نريد أن نقيّم أي أحتمال من هذه الاحتمالات فسوف نجده يستحوذ على مقدار من قيمة العلم «١»، واذا كان هذا المقدار غير مساو للمقادير الأخرى، التي تستحوذ عليها سائر الأطراف، فهذا يعني أن قيمتها لا تساوي $\frac{1}{\text{عدد مجموع الأطراف}}$. مثلاً: لو كانت أطراف العلم الاجمالي «٣» ثلاثة وكان الطرف «أ» يستحوذ على « $\frac{1}{6}$ » قيمة العلم ، وكان الطرف «ب» يستحوذ على « $\frac{1}{6}$ » قيمة العلم ، وكان الطرف «ج» يستحوذ على « $\frac{4}{6}$ » من قيمة العلم. فهل يصح أن نقول إنّ قيمــة الأحتــمال = $\frac{\text{رقم اليقين}}{\text{عدد أعضاء مجموعة الأطراف}}$ ، أمْ لا يصح ذلك؟

أن قيمة الأحتمال وفق الصيغة الأولى = $\frac{\text{رقم اليقين}}{\text{عدد أعضاء مجموعة الاطراف}}$

واذا طبقنا المعادلة على الفرضية المتقدمة فهذا يعني ان قيمة احتمال كل طرف = $\frac{1}{٣}$، وهذه القيمة تتناقض مع الفرض المطروح.

∴ لاتصح الصيغة الأولى مع افتراض عدم تساوي قيم مجموعة الاطراف، فلا بد من افتراض التساوي سلفاً.

وهـذا يعني ان الصيغة الأولى للتعريف الأجمالي تستدعي اضافة بديهية جديدة تقول:

«أن العلم الأجمالي ينقسم بالتساوي على اعضاء مجموعة الأطراف، التي تتمثل فيه».

وهذه هي البديهية الاضافيه الأولى التي يستدعيها التفسير الاجمالي في ضوء الصيغة الأولى.

أمـا الصيغـه الثانية للتفسير الاجمالي فلا تحتاج الى اضافة هذه البـديهية، لانها تقـول إنّ قيمـة احتمال «س» =

$$\frac{\text{عدد مراكز «س»}}{\text{العدد الكلي لأطراف العلم الأجمالي}}$$

واحتمال «س» هنا لا يعبر عن درجة من درجات التصديق، ومن ثمّ لا يمثل جزءاً من أجزاء العلم. ونحن انما احتجنا الى اضافه البديهية السابقة، لأننا اعتبرنا الأحتمال درجة من درجات التصديق، فهو جزء من العلم، واذا كان كذلك لا بد من افتراض تلك البديهية.

٢ـ قواعد حساب الأحتمال

تقدم في الفصل السابق تطبيق أهم قواعد حساب الاحتمال على أمثلتهـا. وقد أشرنا الى مضمون هذه القواعد. وفي هذه الفقرة من هذا

الفصل نحاول وضع هذه القواعد ضمن صياغتها النهائية. وسوف نحاول أيضاً ايضاح وصياغة ما لم نوضحه من قواعد أساسية في حساب الأحتمال:

أ ـ قاعدة الجمع:

تستخدم قاعدة الجمع لقياس قيمة احتمال أحدى الحوادث بالنسبة الى «س» . وهي تعتمد أساساً على بديهية الانفصال، وقد ذكرنا في الفصل السابق أمثلة استخدام هذه القاعدة. ويمكن أن نضع هذه القاعدة في صياغة عامة تقول:

(ان احتمال وقوع حادثة واحده على الأقل من مجموعة حوادث لا يزيد أبداً عن مجموع احتمالات وقوع كل حادثة على حدة).

فاذا رمزنا الى الاحتمال بـ «ح» والى الحوادث بـ «ك»، «ل»، «ج»، «د» فسوف تتمثل هذه القاعدة العامه في المعادلة التالية:

ح «ك» او «ل» او «ج»، او «د» $\leqq \frac{ك}{س} + \frac{ل}{س} + \frac{ج}{س} + \frac{د}{س}$

أي ان احتمال أحدى الحوادث (ك، ل، ج، د) يساوي أو أصغر من مجموع $\frac{ك}{س}$ ، $\frac{ل}{س}$ ، $\frac{ج}{س}$ ، $\frac{د}{س}$ ، ولا يمكن أن يزيد عن هذا المجموع.

ب ـ قاعدة الضرب:

تستند هذه القاعدة على بديهية الاتصال المتقدمة. ويمكن أن نضع هذه القاعدة في صياغتين مختلفتين تبعاً لاختلاف طبيعة الاحتمال. فأذا كانت

الأحتمالات مستقلة تقول القاعدة:

(أن احتمال وقوع اي عدد من الحوادث المستقلة معاً يساوي حاصل ضرب احتمالات وقوع كل حادثة على حدة).

أما اذا كانت الاحتمالات مشروطة فالقاعدة هي:

(أنّ احتمال وقوع حادثتين معاً يساوي حاصل ضرب احتمال احداهما في احتمال الأخرى مشروطاً بوقوع الأولى).

ج ـ قواعد المجموعة المتكاملة:

ما هي المجموعة المتكاملة؟

أذا كانت لدينا مجموعة حوادث وكان لا بد أن تقع واحدة منها فقط، تسمى هذه المجموعة من الحوادث بـ «المجموعة المتكاملة».

مثال: أذا أجرينا عدداً من التجارب ولنرمز لها (أي عدد التجارب) بـ «ب» فوجدنا أن بعض التجارب يظهر فيها «أ»، وبعض التجارب يظهر فيها «أَ»، وكانت «أ» تعني حدوث ظاهرة من الظواهر، و «أَ» تعني عدم حدوثها.

حينئذ سيكون أحتمال «أ» يساوي $\frac{أ}{ب}$، كما أن أحتمال «أَ» = $\frac{أَ}{ب}$،
وبما أن أ + أَ = ب (لأن «ب» أما أن يظهر معه «أ» وأما أن يظهر معه «أَ») اذن:

$$\frac{أ}{ب} + \frac{أَ}{ب} = \frac{أ + أَ}{ب} = \frac{ب}{ب} = ١$$

اذن! مجموع احتمالات «أ» و «أَ» يساوي واحداً.ويمكن تعميم هذه النتيجة على كل حادثتين متناقضتين، فيقال كقاعدة:

(مجموع احتمال حادثتين متناقضتين يساوي واحداً صحيحاً).

مثال: اذا كانت لدينا «مجموعة متكاملة» مؤلفة من عشرين حادثة ولنرمز لها: «أ ١»، «أ٢»، «أ٣».... «أ٢٠».

اذن؛ مجموع احتمالات المجموعة المتكاملة:

أ١+ أ ٢ +......... + أ٢٠ = أ١ او أ٢ او أ٣ ...... او أ٢٠

ومن الواضح ان أ١. او أ٢، اوأ٣...... او أ٢٠= لا بد ان تقع واحدة منها، أي انها تساوي (١).

وهذا يعني ان: أ١+ أ٢+ أ٣+...... + أ٢٠= ١

وعلى هذا الأساس نستطيع ان نقرر:

(أنّ مجموع احتمالات المجموعة المتكاملة يساوي واحداً).

كما نستطيع أن نقرر في ضوء ما تقدم:

«انّ كل حادثتين متناقضتين مجموعة متكاملة).

د ـ قاعدة الاحتمال العكسي:

تقدم في الفصل السابق مثال هذه القاعدة، وطريقة استنتاجها. وفقا لقاعدة الضرب في الاحتمالات المشروطة، ويمكن وضع هذه القاعدة في الصيغة التالية:

(ان قيمة احتمال حادثة ما على تقدير وقوع حادثة اخرى تساوي قيمه احتمال وقوع الحادثة مضروباً في قيمة احتمال الحادثة الاخرى على تقدير وقوع الحادثة مقسوماً على احتمال الحادثة الاخرى.)

هـ ـ مثال الحقائب:

يكتسب مثال الحقائب اهميته الخاصة بحكم استخدامه في امتحان

كفاءة طريقة «لابلاس» لسير الدليل الاستقرائي وفق حساب الاحتمال. والا فهو تطبيق من تطبيقات حساب الاحتمال وفق قاعدة الاحتمال العكسي.

المثال: لدينا ثلاث حقائب تحتوي الأولى على ثلاث كرات بيضاء وكرتين سوداوين، والثانية على أربع كرات بيضاء وكرة سوداء، والثالثة تحتوي على خمس كرات بيضاء، ثم اخترنا واحدة من هذه الحقائب بشكل عشوائي ولا ندري هل هي الحقيبة الأولى ام الثانية أم الثالثة، وسحبنا ثلاث كرات منها، فظهرت بيضاء، احسب قيمة احتمال ان تكون هذه الحقيبة التي اخترناها عشوائياً هي الحقيبة الثالثة، التي تحتوي على كرات كلها بيضاء.

الحل: المطلوب ـ كما هو واضح ـ حساب قيمة احتمال ان تكون الحقيبة هي الثالثة، على تقدير سحب ثلاث كرات بيضاء. نستخدم الرموز، ونرمز الى احتمال سحب ثلاث كرات بيضاء بـ ل/س، والى احتمال ان تكون الحقيبة هي الثالثة بـ ك/س.

ل/س، وك/س معا = ل/س × ك/س. ل، وفقاً لبديهية الاتصال.

ل/س وك/س معا = ك/س × ل/س. ك، وفقاً لبديهية الاتصال.

ل/س × ك/س. ل = ك/س × ل/س. ك.

$$\text{ك/س. ل} = \frac{\text{ك/س} \times \text{ل/س. ك}}{\text{ل/س}}$$

أي: ان احتمال ان تكون الحقيبة هي الثالثة على تقدير سحب ثلاث كرات بيضاء يساوي احتمال ان تكون الحقيبة هي الثالثة، مضروباً في

احتمال سحب ثلاث كرات بيضاء على تقدير أن تكون الحقيبة هي الثالثة، مقسوماً على احتمال سحب ثلاث كرات بيضاء.

ك/س = ١/٣، لان لدينا ثلاث حقائب ولا ندري أياً منها في أيدينا، فاحتمال كل واحدة منها يساوي ١/٣.

ل/س. ك = ١ لأن احتمال سحب ثلاث كرات بيضاء على تقدير ان تكون الحقيبة التي بأيدينا هي الحقيبة الثالثة احتمال مؤكد الوقوع فهو يساوي رقم اليقين (١).

اما (ل/س) فماذا يساوي؟

ل/س يعني قيمة احتمال سحب ثلاث كرات بيضاء. فاذا أردنا ان نسحب من الحقيبة المجهولة التي بأيدينا ثلاث كرات، وأردنا ان نحسب قيمة احتمال خروجها بيضاء، فهذا الاحتمال يعني وقوع احدى ثلاث حوادث. فاما أن تكون الحقيبة الأولى ونسحب ثلاث كرات بيضاء منها، وإما أن تكون الحقيبة الثانية ونسحب ثلاث كرات بيضاء منها، وإما أن تكون الحقيبة الثالثة ونسحب ثلاث كرات بيضاء منها.

ولأجل الحصول على قيمة احتمال سحب ثلاث كرات بيضاء لا بد من الجمع بين هذه الاحتمالات الثلاثة، وفقاً لقاعدة الجمع في الاحتمالات المتنافية، لأن هذه الاحتمالات الثلاثة يمتنع اجتماعها.

ولنرمز الى احتمال ان تكون الحقيبة الاولى ونسحب ثلاث كرات بيضاء بـ هـ/ع، ونرمز الى احتمال ان تكون الحقيبة الثانية ونسحب ثلاث كرات بيضاء بـ ن/ع، والى احتمال ان تكون الحقيبة الثالثة.ونسحب ثلاث كرات بيضاء بـ و/ع.

حينئذ سوف تكون المعادلة كالتالي:

$$ك/س. ل = \frac{ك/س \times ل/س. ك}{ل/س} = \frac{١/٣ \times ١}{هـ/ع + ن/ع + و/ع}$$

ولكن ما هي قيمة هـ/ع؟

ان قيمة هـ/ع في الواقع تعني احتمال وقوع حادثتين معاً وهما احتمال سحب ثلاث كرات بيضـاء واحتمال كون الحقيبة هي الاولى، وحينئذ لا بد من تطبيق قاعدة الضرب في الاحتمالات المشروطة لاستخراج قيمة هـ/ع. واذا رمـزنا الى احتمال كون الحقيبة هي الاولى بـ ق/س، فسوف تكون هـ/ع = ق/س × ل/س. ق.

اما احتمال ن/ع فهو يساوي ايضاً احتمال ان تكون الحقيبة هي الحقيبة الثانية مضروبــاً في احتمال سحب ثلاث كرات بيضاء على تقدير كون الحقيبه الثانية، واذا رمزنا الى احتمال كون الحقيبة هي الثانية بـ ص /س، فسوف تكون ن/ع = ص /س × ل/س. ص.

واحتمال و/ع يساوي أيضـــاً احتمال أن تكون الحقيبة هي الثالثة مضــــروباً في احتمال سحب ثلاث كرات بيضاء على تقدير كون الحقيبة الثالثة، لنرمز الى احتمال كون الحقيبه الثالثة بـ ك/س حينئذ ستكون و/ع = ك/س × ل/س. ك.

ق/س = ١/٣

ل/س. ق = ١/١٠.

ص /س = ١/٣.

ل/س. ص = ٤/١٠

ك/س = ١/٣، كما تقدم. ول/س. ك = ١، كما تقدم ايضاً.

$$\text{اذن: ك/س. ل} = \frac{\text{ك/س} \times \text{ل/س. ك}}{\text{ل/س}}$$

$$= \frac{\text{ك/س} \times \text{ل/س . ك}}{\text{هـ/ع + ن/ع + و/ع}}$$

$$= \frac{\text{ك/س} \times \text{ل/س. ك}}{\text{ق/س} \times \text{ل/س. ق + ص /س} \times \text{ل/س. ص + ك/س} \times \text{ل/س. ك}}$$

وبالتعويض :

$$\frac{\text{٣/١} \times \text{١}}{\text{٣/١} \times \text{١٠/١ + ٣/١} \times \text{١٠/٤ + ٣/١} \times \text{١}} = \frac{\text{٣/١}}{\text{٣٠/١ + ٣٠/٤ + ٣/١}}$$

$$= \frac{\text{٣/١}}{\text{٣٠/١٥}} = \text{٣/١} \times \text{٣٠/١٥ = ٣٠/٤٥ = ٣/٢.}$$

التفسير الاجمالي ومثال الحقائب:

نرمز الى كرات الحقيبة الاولى بـ (١، ٢، ٣، ٤، ٥،) والى كرات الحقيبة الثانية بـ (١َ ، ٢َ ، ٣َ ، ٤َ ، ٥َ) ونرمز الى كرات الحقيبة الثالثة بـ (١ً، ٢ً، ٣ً، ٤ً، ٥ً).

ولنفرض أن الكرات من (١ ـ ٣) هي البيضاء في الحقيبة الاولى، وأن الكرات من (١ ـ ٤) هي البيضاء في الحقيبة الثانية.

قبل أن نتأكد من سحب ثلاث كرات بيضاء من الحقيبه المختارة عشوائياً نريد حساب احتمال خروج ثلاث كرات بيضاء من احدى الحقائب المختارة عشوائياً.

حينئذ سنواجه علمًا اجمالياً مؤلفاً من (٣٠) طرفاً، فنحن حينما نريد سحب ثلاث كرات من احدى الحقائب نعلم اجمالاً بأن احدى

الصور التالية سوف تقع حتماً، لأن الحقيبة إما أن تكون هي الحقيبة الاولى، وسحب ثلاث كرات منها له عشر صور:

١ـ أن تخرج الكرة (١، ٢، ٣).
٢ـ أن تخرج الكرة (١، ٢، ٤).
٣ـ أن تخرج الكرة (١، ٣، ٤).
٤ـ أن تخرج الكرة (١، ٢، ٥).
٥ـ أن تخرج الكرة (١، ٤، ٥).
٦ـ أن تخرج الكرة (١، ٣، ٥).
٧ـ أن تخرج الكرة (٢، ٣، ٤).
٨ـ أن تخرج الكرة (٢، ٣، ٥).
٩ـ أن تخرج الكرة (٢، ٤، ٥).
١٠ـ أن تخرج الكرة (٣، ٤، ٥).

ونلاحظ هنا ان الرقم (١) من هذه الصور وحده في صالح خروج ثلاث كرات بيضاء.

واما أن تكون الحقيبة التي نريد سحب ثلاث كرات منها هي الحقيبة الثانية، وسوف نواجه ايضاً عشر صور:

١ـ أن تخرج الكرة (١َ ، ٢َ ، ٣َ).
٢ـ أن تخرج الكرة (١َ ، ٢َ ، ٤َ).
٣ـ أن تخرج الكرة (١َ ، ٣َ ، ٤َ).
٤ـ أن تخرج الكرة (١َ ، ٢َ ، ٥َ).
٥ـ أن تخرج الكرة (١َ ، ٤َ ، ٥َ).
٦ـ أن تخرج الكرة (١َ ، ٣َ ، ٥َ).

٧ـ أن تخرج الكرة (٢َ ، ٣َ ، ٤َ).
٨ـ أن تخرج الكرة (٢َ ، ٣َ ، ٥َ).
٩ـ أن تخرج الكرة (٢َ ، ٤َ ، ٥َ).
١٠ـ أن تخرج الكرة (٣َ ، ٤َ ، ٥َ).

ونلاحظ هنا ان الرقم (١)، و (٢)، و (٣)، و (٧) في صالح خروج ثلاث كرات بيضاء.

واما أن تكون الحقيبة هي الثالثة ونواجه ايضاً عشر صور كلها في صالح خروج ثلاث كرات بيضاء.

واذا أردنا أن نسحب ثلاث كرات من أحدى الحقائب سنعلم اجمالاً بوقوع احدى الصور الثلاثين المتقدمة، وخمس عشرة صورة منها في صالح خروج ثلاث كرات بيضاء.

اما اذا تأكدنا من سحب ثلاث كرات بيضاء من الحقيبة المختارة عشوائياً فهذا يعني اننا سوف نتأكد من وقوع احدى الصور الخمس عشرة، التي هي في صالح خروج ثلاث كرات بيضاء.

أي سنعلم اجمالا بأن احدى هذه الصور هي التي وقعت، لأن الحقيبة اما ان تكون هي الاولى وهذا يعني وقوع الصورة الاولى، واما ان تكون هي الثانية، وهذا يعني وقوع احدى الصور الاربعة المتقدمة، واما أن تكون هي الثالثة، وهذا يعني وقوع احدى صورها العشرة.

اذن! يتردد علمنا الاجمالي ـ بعد سحب ثلاث كرات بيضاء ـ بين خمسة عشر طرفا، واذا أردنا أن نحسب قيمة احتمال أن تكون الحقيبة التي اخترناها عشوائياً هي الحقيبة الثالثة التي تحتوي على خمس كرات بيضاء فهذا يعني أن نطبق قانون التفسير الاجمالي في حساب قيمة احتمال الحادثة:

$$ح = \frac{\text{عدد الاطراف التي تلازمها}}{\text{المجموع الكلي لاطراف العلم الاجمالي}} = \frac{ع}{م}$$

ح = ع/م.

م = ١٥.

ع = ١٠،لان عدد الاطراف التي تلازم كون الحقيبة هي الثالثة (عشرة) من أصل خمسة عشر طرفاً اذن! ع/م = ١٠/١٥ = ٢/٣، وهذه النتيجة مطابقة تماماً لما تم حسابه رياضياً في مثال الحقائب.

و ـ برنولي:

برنولي (١٦٥٤ ـ ١٧٠٥) أحد أعلام نظرية الاحتمال، واليه يرجع الفضل في اكتشاف قانون التوزيع في الأعداد الكبيرة. وله كتاب يدعى (فن التخمين)، نشره ابن أخيه بعد وفاته بسبع سنين.

حينما نتناول (برنولي) في نظرية الاحتمال وحسابه، فهذا يعني أن ندرس ثلاث قضايا رئيسية مترابطة:

اولاً ـ دراسة معادلات برنولي.

ثانياً ـ تطبيق معادلات برنولي على التوزيع الطبيعي في الأعداد الكبيرة.

ثالثاً ـ دراسة وفهم محتوى نظرية برنولي واثباتها.

وسوف نأتي على دراسة معادلات برنولي، وتوزيع برنولي ضمن فقرة واحدة، مستخدمين الامثلة في طرح معادلات برنولي واستخلاص نظرية التوزيع لديه. ثم ندرس أيضاً نظرية برنولي واثباتها في فقرة ثانية.

ويمكن هنـا ان نلقي نظرة عامـة حول معادلات برنولي ومفهوم التوزيع الذي تستبطنه، والنظرية التي أقامها على أساس ذلك، انطلاقاً من المثال البسيط التالي:

لو ألقينا قطعة النقد خمس مرات، فما هي قيمة احتمال أن يظهر وجه الصورة مرتين، علمــاً أن احتمال ظهور وجه الصورة = ٢/١، وظهور وجه الكتابة = ٢/١؟

قيمة احتمال ظهور وجه الصورة مرتين ضمن خمس مرات نرمي بها قطعـه النقـد يسـاوي: $\frac{\text{عدد الصـور المؤيدة لظهور وجه الصورة مرتين}}{\text{المجموع الكلي لأطراف العلم الاجمالي}}$

ومعـادلات برنـولي هي التي تحدد لنا قيمة البسط والمقام في هذا الكسر، فهي تستخرج عدد الصور الملازمة لظهور وجه الصورة مرتين وفق قاعدة.

$$\frac{٥!}{٢!(٥-٢)!} = ١٠$$

كما نستخرج عدد أطراف العلم الاجمالي وفق قاعدة الضرب في الاحتمالات المستقلة:

$$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$$

ثم تحدد قيمة الاحتمال وفق المعادلة التالية:

$$ح = \frac{٥!}{٣!(٥-٣)!} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{(٥)} = \frac{١٠}{٣٢}$$

ووفق معادلات برنولي نستطيع أن نحدد اكبر الاحتمالات لظهور وجه الصورة في (٥) رميات، هل هو في مرة واحدة أو في مرتين أو ثلاث أو أربع أو خمس مرات؟

وعلى أساس معادلات برنولي نستطيع أن نقول ان نسبة المرات الاكبر احتمالا الى المجموع الكلي لرميات قطعة النقد مثلا تقترب من قيمة احتمال الحادثة المنفردة كلما زدنا من العدد الكلي للرميات حتى يبلغ الفرق بينهما مقداراً ضئيلاً جداً، يمكن اهماله، والقول بان نسبة المرات الاكبر احتمالاً الى المجموع الكلي للرميات يساوي قيمة احتمال الحادثة.

وعلى أساس نظرية برنولي نقول ان المرات الأكبر احتمالاً وما يقرب منها من مرات تساوي قيمتها الاحتمالية (١)، اذا كان عدد الرميات كبيراً جداً. أي اذا رمينا قطعة النقد مئات المرات نستطيع القول انها ستقع بنسبة $\frac{١}{٢}$ على وجه الصورة.

أولاً ـ معادلات برنولي

مثال «٩»: لو قذفنا قطعة نقد «٤٠» مرة، فما هي قيمة احتمال أن يخرج وجه الصورة في المرات العشرة الاولى، علما أن قيمةاحتمال خروج وجه الصورة يساوي $\frac{١}{٢}$ ؟

حينما نقذف بقطعة نقد «٤٠» مرة، ونفترض ان وجه الصورة يظهر في المرات العشرة الاولى، فهذا يعني اننا نفترض ايضاً خروج وجه الكتابة في المرات الثلاثين (١١ ـ ٤٠).

الاحتمالات مستقلة هنا، ونحن نريد أن نحسب قيمة احتمال ظهور وجه الصورة في المرة الاولى وظهوره في المرة الثانية.. الى العاشرة واحتمال ظهور وجه الكتابة في المرة الحادية عشرة، والثانية عشرة.... الى الأربعين. اذن! يجب ان نطبّق بديهية الاتصال.

وحينما نطبّق بديهية الاتصال فهذا يعني أن نضرب قيمة احتمال ظهور وجه الصورة في المرة الاولى × احتمال ظهورها في المرة الثانية × ..... × احتمال ظهورها في المرة العاشرة × احتمال ظهور وجه الكتابة في المرة الحادية عشرة × احتمال ظهور وجه الكتابة في المرة الثانية عشرة × .... × احتمال ظهور وجه الكتابة في المرة الاربعين.

وحسب الفرض المطروح في المثال تكون النتيجة كما يلي:

$$\left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠} \times \left(١ - \frac{١}{٢}\right)^{٤٠ - ١٠}$$

واذا استبدلنا الارقام بالرموز، وافترضنا أن العدد الكلي للرميات «ن»، وعدد مرات خروج وجه الصورة «م»، واحتمال خروج وجه الصورة في كل مرة «هـ» فسوف تكون المعادلة كما يلي:

$$(\text{هـ})^{\text{م}} \times (١ - \text{هـ})^{\text{ن} - \text{م}}$$

مثال «١٠»: لو قذفنا قطعة نقد «٤٠» مرة، فما هي عدد الصور الممكنة لوقوع وجه الصورة «١٠» مرات؟

هناك صور كثيرة لخروج وجه الصورة ١٠ مرات، ولأجل ان نحدد مقدار هذه الصور بشكل دقيق علينا ان نستخدم قاعدة التوافيق، التي تعني: (اننا اذا أردنا ان نستخرج توافيق «م» في «ن» فعلينا ان نقسم «ن» مضروبةً في ما يقل عنها بواحد مضروباً فيما يقل عنه بواحد وهكذا الى العدد [ن ـ (م ـ ١)] على مفكوك «م»).

وبلغة الرموز = $$\frac{\text{ن} \times (\text{ن} - ١) \times (\text{ن} - ٢) \times .... \times [\text{ن} - (\text{م} - ١)]}{\text{م} \times (\text{م} - ١) \times (\text{م} - ٢) \times (\text{م} - ٣) \times .... \times ١}$$

واذا اردنا ان نعوض عن الرموز بالاعداد المفروضة في المثال فسوف

تكون المعادلة كالتالي:

$$\frac{\text{٤٠} \times \text{٣٩} \times \text{٣٨} \times \text{......} \times \text{٣١}}{\text{١٠} \times \text{٩} \times \text{٨} \times \text{٧} \times \text{٦} \times \text{٥} \times \text{٤} \times \text{٣} \times \text{٢} \times \text{١}}$$

واذا أردنا اختصار المعادلة الرمزية فهي =

$$\frac{\text{ن} \times (\text{ن} - \text{١}) \times \text{.....} \times [\text{ن} - (\text{م} - \text{١})]}{\text{م} !}$$

حيث أن مفكوك «م» يعبر عنه رمزيا بالاشارة «!». كما أن مفكوك عشرة =١٠!.

ويمكننا أن نستبدل الكسر المتقدم بكسر آخر يساويه، وذلك ان نضرب البسط والمقام بكميتين متساويتين. ويصبح كما يلي:

$$\frac{\text{٤٠} \times \text{٣٩} \times \text{٣٨} \times \text{.....} \times \text{٣١} \times \text{٣٠} \times \text{٢٩} \times \text{....} \times \text{١}}{\text{١٠} \times \text{٩} \times \text{٨} \times \text{.....} \times \text{١} \times \text{٣٠} \times \text{٢٩} \times \text{.....} \times \text{١}}$$

يلاحظ هنا اننا ضربنا مفكوك (٣٠) في كل من البسط والمقام. وسوف تكون النتيجة واحدة. واذا أردنا اختصار المعادلة فهي =

$$\frac{\text{٤٠} !}{\text{١٠} ! \times (\text{٤٠} - \text{١٠}) !}$$

وحينما نستبدل الأرقام بالرموز فهي كما يلي:

$$\frac{\text{ن} !}{\text{م} ! \times (\text{ن} - \text{م}) !}$$

اذن! يمكن ان نضع قاعدة التوافيق بالصورة الرمزية الجديدة، ونقول: ان توافيق «م» في «ن» تساوي مفكوك «ن» مقسوماً على مفكوك «م» في مفكوك (ن - م).

مثال«١١»: ما هي قيمة احتمال أن يخرج وجه الصورة - في المثالين السابقين - عشر مرات، وأن يخرج وجه الكتابة ثلاثين مرة؟

تعرفنا في المثال رقم «٩» على طريقة استخراج قيمة احتمال ظهور

وجـه الصورة في المرات العشرة الأولى. وظهور وجه الصورة في المرات العشرة الاولى حالة ضمن ملايين الحالات، التي يمكن ان يظهر فيها وجه الصورة عشر مرات ضمن أربعين رمية.

واذا أردنـا قياس احتمال ظهور وجه الصورة عشر مرات حينما نقـذف النقد (٤٠) مرة، فهذا يعني أننا نريد حساب احتمال كل الصور الممكنـة لظهور وجه الصورة عشر مرات حينما نقذف النقد (٤٠) مرة، وتـطبيقـاً لبديهية الانفصال لابد ان نجمع قيم احتمالات مجموع الصور الممكنة، وهي تساوي ضرب مجموع الصور الممكنة في قيمة احتمال صورة واحدة منها.

وقد تبين لنا من خلال المثال التاسع كيفية استخراج قيمة ظهور صورة محددة من الصور الممكنة. حيث انها تساوي

$$\left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠} \times \left(١ - \frac{١}{٢}\right)^{٤٠-١٠}$$

واذا رمزنا الى «٤٠» رميه بـ«ن» ، والى عدد المرات التي يظهر فيها وجه الصورة بـ «م»، والى قيمة احتمال الحادثة بـ (هـ)، سوف تكون المعادلة كالتالي:

$$ح = (هـ)^{م} \times (١ - هـ)^{ن-م}$$

وقد تعلمنا من المثال العاشر كيفية استخراج عدد الصور الممكنة لظهـور وجـه الصـورة عشر مرات ضمن أربعين مرة. وكان عبارة عن حساب قيمة الكسر التالي: $\frac{ن!}{م!(ن-م)!}$

نأتي هنا لاستخراج قيمة احتمال ظهور وجه الصورة عشر مرات ضمن اربعين رمية، حيث انها تساوي مجموع توافيق(١٠) في (٤٠) أو مجموع

توافيق «م» في «ن» مضروباً في احتمال ظهور وجه الصورة في عشر مرات محددة. واذا رمزنا الى قيمة احتمال ظهور وجه الصورة عشر مرات ضمن اربعين رمية بـ (حَ) فسوف تكون المعادلة كما يلي:

$$\text{حَ} = \frac{\text{ن}!}{\text{م}!\,(\text{ن} - \text{م})!} \times (\text{هـ})^{\text{م}} \times (\text{١} - \text{هـ})^{\text{ن} - \text{م}}$$

ويمكن كتابة قيمة الاحتمال بالأرقام كما يلي:

$$\text{حَ} = \frac{\text{٤٠}!}{\text{١٠}!\,(\text{٤٠} - \text{١٠})!} \times \left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)^{\text{١٠}} \times \left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)^{(\text{٤٠} - \text{١٠})}$$

مثال «١٢»: هل ان احتمال خروج وجه الكتابة عشر مرات اكبر من احتمال خروجه احدى عشرة مرة ضمن أربعين رمية لقطعة النقد، أم العكس ؟

هنـاك اسلوبـان للاجـابة على هذا الاستفهام، فمن الممكن ان تتعـرف على الاحتـمال الأكبر عن طريق حساب قيمة كل احتمال من الاحتمالين. وهناك طريق آخر أقصر من الاول، وذلك بان نحسب قيمة الكسر التالي:

$$\frac{\text{احتمال خروج وجه الكتابة «١٠ + ١» مرات}}{\text{احتمال خروج وجه الكتابة «١٠» مرات}}$$

فاذ كانت النتيجة = «١»، فهذا يعني تساوي قيمـة الاحتمالين، واذا كانت أكبر من واحد فهذا يعني ان احتمال خروجه «١١» مرة اكبر، واذا كانت نتيجة اختصار الكسر اصغر من واحد فهذا يعني ان قيمة احتمال خروجه عشر مرات أكبر من قيمة احتمال خروجه «١١» مرة.

نتبع الاسلوب الثاني، ونرمز الى احتمال خروج وجه الكتابة بـ «ح»، فيكون الكسر كما يلي:

$$\frac{ح«١٠+١»}{ح«١٠»} = \frac{\frac{٤٠!}{١١!(٤٠-١١)!} \times (\frac{١}{٢})^{١١} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠-١١}}{\frac{٤٠!}{١٠!(٤٠-١٠)!} \times (\frac{١}{٢})^{١٠} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠-١٠}}$$

والكسر الاخير يساوي:

$$\frac{٤٠!\ ١٠!\ (٤٠-١٠)! \times (\frac{١}{٢})^{١١} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠-١١}}{٤٠!\ ١١!\ (٤٠-١١)! \times (\frac{١}{٢})^{١٠} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠-١٠}}$$

$$= \frac{١٠!\ (٤٠-١٠)! \times (\frac{١}{٢})^{١١} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠-١١}}{١١!\ (٤٠-١١)! \times (\frac{١}{٢})^{١٠} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠-١٠}}$$

$$= \frac{(٤٠-١٠)! \times (\frac{١}{٢})^{١١} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠-١١}}{١١(٤٠-١١)! \times (\frac{١}{٢})^{١٠} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠-١٠}}$$

$$= \frac{(٤٠-١٠) \times (\frac{١}{٢})^{١١} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠-١١}}{١١ \times (\frac{١}{٢})^{١٠} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠-١٠}}$$

$$= \frac{(٤٠ - ١٠) \times \frac{١}{٢} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠ - ١١}}{١١ \times (\frac{١}{٢})^{٤٠ - ١٠}}$$

$$= \frac{(٤٠ - ١٠) \times \frac{١}{٢}}{١١ \times \frac{١}{٢}} = \frac{٣٠ \times \frac{١}{٢}}{١١ \times \frac{١}{٢}} = \frac{٣٠}{١١}$$

وحيث ان النتيجة اكبر من «١»، اذن فاحتمال خروج وجه الكتابة «١١» مرة أكبر من احتمال خروجه «١٠» مرات.

مثال «١٣»: هل ان احتمال ظهور وجه الكتابة «١٢» مرة أكبر أم «١٣» مرة ضمن أربعين رمية؟

نحسب قيمة الكسر التالي: $\frac{ح(١٢ + ١)}{ح(١٢)}$

$$= \frac{\frac{!٤٠}{!١٣ \; !(٤٠ - ١٣)} \times (\frac{١}{٢})^{١٣} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠ - ١٣}}{\frac{!٤٠}{!١٢ \; !(٤٠ - ١٢)} \times (\frac{١}{٢})^{١٢} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠ - ١٢}}$$

$$= \frac{!٤٠ \; !١٢ \; !(٤٠ - ١٢) \times (\frac{١}{٢})^{١٣} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠ - ١٣}}{!٤٠ \; !١٣ \; !(٤٠ - ١٣) \times (\frac{١}{٢})^{١٢} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠ - ١٢}}$$

$$= \frac{(٤٠ - ١٢) \times \frac{١}{٢}}{١٣ \times \frac{١}{٢}} = \frac{٢٨ \times \frac{١}{٢}}{١٣ \times \frac{١}{٢}} = \frac{٢٨}{١٣}$$

اذن! (ح) ظهور وجه الكتابة (١٣) مرة أكبر من (ح) ظهوره (١٢) مرة.

مثال«١٤»: هل ان احتمال ظهور وجه الكتابة «١٤» مرة اكبر ام «١٥» مرة، ضمن أربعين رمية؟

نحسب قيمة الكسر التالي: $\frac{ح\,(١٤ + ١)}{ح\,(١٤)}$

$$= \frac{\frac{٤٠!}{١٥!\,(٤٠ - ١٥)!} \times (\frac{١}{٢})^{١٥} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠ - ١٥}}{\frac{٤٠!}{١٤!\,(٤٠ - ١٤)!} \times (\frac{١}{٢})^{١٤} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠ - ١٤}} = \frac{٤٠ - ١٤}{١٥} = \frac{٢٦}{١٥}$$

.·. احتمال ظهور وجه الكتابة (١٥) مرة أكبر من احتمال خروجه (١٤) مرة.

مثال«١٥»: هل ان احتمال ظهور وجه الكتابة «١٨» مرة أكبر، أم أحتمال ظهوره «١٩» مرة هو الاكبر؟

نحسب قيمة الكسر التالي: $\frac{ح\,(١٨ + ١)}{ح\,(١٨)}$

$$= \frac{\frac{٤٠!}{١٩!\,(٤٠ - ١٩)!} \times (\frac{١}{٢})^{١٩} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠ - ١٩}}{\frac{٤٠!}{١٨!\,(٤٠ - ١٨)!} \times (\frac{١}{٢})^{١٨} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠ - ١٨}}$$

$$= \frac{٤٠!\;١٨!\,(٤٠ - ١٨)! \times (\frac{١}{٢})^{١٩} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠ - ١٩}}{٤٠!\;١٩!\,(٤٠ - ١٩)! \times (\frac{١}{٢})^{١٨} \times (\frac{١}{٢})^{٤٠ - ١٨}}$$

$$= \frac{\text{٤٠} - \text{١٨}}{\text{١٩}} = \frac{\text{٢٢}}{\text{١٩}}$$

∴ احتمال ظهور وجه الكتابة «١٩» مرة اكبر من احتمال ظهوره «١٨» مرة.

نأتي هنا لاستخدام الرموز بدلاً من الأرقام. ونرمز الى العدد الكلي للرميات الذي هو (٤٠) رمية بـ «ن»، ولعدد الرميات التي يراد قياس احتمالها بـ «و»، ولقيمة احتمال ظهور وجه الكتابة بـ (هـ). حينئذ ستكون معادلة «برنولي» كما يلي: $\frac{\text{ح}(\text{و}+\text{١})}{\text{ح}(\text{و})}$

$$= \frac{\frac{\text{ن}!}{(\text{و}+\text{١})!\,[\text{ن}-(\text{و}+\text{١})]!} \times (\text{هـ})^{(\text{و}+\text{١})} \times (\text{١}-\text{هـ})^{[\text{ن}-(\text{و}+\text{١})]}}{\frac{\text{ن}!}{\text{و}!\,(\text{ن}-\text{و})!} \times (\text{هـ})^{\text{و}} \times (\text{١}-\text{هـ})^{(\text{ن}-\text{و})}}$$

$$= \frac{\text{ن}!\,\text{و}!\,(\text{ن}-\text{و})! \times \text{هـ}^{(\text{و}+\text{١})} \times (\text{١}-\text{هـ})^{(\text{ن}-\text{و}-\text{١})}}{\text{ن}!\,(\text{و}+\text{١})!\,(\text{ن}-\text{و}-\text{١})! \times (\text{هـ})^{\text{و}} \times (\text{١}-\text{هـ})^{(\text{ن}-\text{و})}}$$

$$= \frac{\text{ن}-\text{و}}{\text{و}+\text{١}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{١}-\text{هـ}}$$

مثال «١٦»: ما هي عدد المرات التي تتمتع بأكبر قيمة احتمالية لظهور وجه الصورة، اذا ما قذفنا بقطعة النقد «١٥» مرة؟

تعرفنا في المثال السابق على الكسر الذي يتم بموجبه قياس أي

الاحتمالين هو الاكبر، احتمال «و» أو احتمال (و + ١)؟ وكان الكسر مساوياً للمعادلة التالية:

$$\frac{\text{ن - و}}{\text{و + ١}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{١ - هـ}}$$

أي ان

$$\frac{\text{قيمة احتمال ظهور الصورة في (و + ١)}}{\text{قيمة احتمال ظهور الصورة في «و»}} = \frac{\text{ن - و}}{\text{و + ١}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{١ - هـ}}$$

فاذا تساوى البسط والمقام وكانت نتيجة الكسر واحداً فهذا يعني ان احتمال ظهور وجه الصورة في «و» من المرات مساو لاحتمال ظهور وجه الصورة في «و + ١» من المرات. اما اذا كانت النتيجة أكبر من واحد فهذا يعني أن البسط أكبر من المقام وكان احتمال ظهور وجه الصوره في (و + ١) أكبر من ظهورها في «و» من المرات.

ونحن نستطيع ان ننطلق من المعادلة:

$$\left(\frac{\text{ن - و}}{\text{١ + و}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{١ - هـ}} \right)$$

لاكتشاف عدد المرات التي تتمتع باكبر قيمة احتمالية لظهور وجه الصورة في حال قذفنا لقطعة النقد «١٥» مرة. ونبدأ بطرح الاستفهام التالي:

هل هناك مقياس يمكن أن نتخذه قاعدة نستعين بها على معرفة الاجابة على الاستفهام التالي: «متى يكون البسط مساوياً للمقام في الكسر

$$\frac{\text{ن - و}}{\text{١ + و}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{١ - هـ}}$$

أي حين يكون احتمال «و» مساوياً لاحتمال «و + ١»؟

نعم هناك مقياس يمكن اعتماده كقاعدة لمعرفة تساوي البسط

والمقام، وهذا المقياس هو اذا كانت «و» مساوية للحد التالي:

(المجموع الكلي لرميات قطعة النقد × احتمال ظهور وجه الصورة في رمية من الرميات ـ احتمال عدم ظهوره).

واذا رمزنا الى المجموع الكلي للرميات بـ «ن»، والى قيمة احتمال ظهور وجه الصورة بـ «هـ»، حينئذ يمكن أن نضع الحد في الصيغة الرمزية التالية: [ن × هـ ـ (١ ـ هـ)].

ولكن ما هو البرهان على ان «و» اذا ساوت الحد فسوف يكون احتمال «و» مساوياً لاحتمال (و + ١)، وان [(ن ـ و) × (هـ)] = (١ + و) × (١ ـ هـ)؟

الجواب: نستطيع البرهنة على ذلك باستبدال الحد بـ «و» في كل من البسط والمقام في الكسر $\frac{\text{ن} - \text{و}}{\text{١} + \text{و}}$ ، فاذا كانت نتيجة المعادلة هي التساوي سيثبت حينئذ أن احتمال (و + ١) يساوي احتمال (و)، وان (ن ـ و) × (هـ) = (١ + و) × (١ ـ هـ).

نأتي اولاً مستخدمين الرموز:

$$\frac{\text{ن} - \text{و}}{\text{١} + \text{و}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{١} - \text{هـ}}$$

نعوض عن (و) بالحد، فتصبح المعادلة كما يلي:

$$\frac{\text{ن} - [\text{ن} \times \text{هـ} - (\text{١} - \text{هـ})]}{\text{١} + [\text{ن} \times \text{هـ} - (\text{١} - \text{هـ})]} \times \frac{\text{هـ}}{\text{١} - \text{هـ}}$$

$$= \frac{\text{ن - ن هـ + ١ - هـ}}{\text{١ + ن هـ - ١ + هـ}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{١ - هـ}}$$

$$= \frac{\text{ن هـ - ن هـ}^{٢} \text{ + هـ - هـ}^{٢}}{\text{١+ ن هـ - ١ + هـ - هـ - ن هـ}^{٢} \text{ + هـ - هـ}^{٢}}$$

$$= \frac{\text{ن هـ - ن هـ}^{٢} \text{ + هـ - هـ}^{٢}}{\text{ن هـ - ن هـ}^{٢} \text{ + هـ - هـ}^{٢}} = ١.$$

نأتي ثانياً مستخدمين الارقام بدل الرموز، ونفترض ان (ن) = ١٥، و(هـ)= $\frac{١}{٢}$.

واذا عوضنا عن (و) بالحد، فتصبح المعادلة كما يلي:

$$\frac{\text{ن - [ن × هـ - (١ - هـ)]}}{\text{١ + ن × هـ - (١ - هـ)}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{١ - هـ}}$$

$$= \frac{١٥ - ١٥ \times \frac{١}{٢} - (١ - \frac{١}{٢})}{١ + ١٥ \times \frac{١}{٢} - (١ - \frac{١}{٢})} \times \frac{\frac{١}{٢}}{١ - \frac{١}{٢}}$$

$$\frac{\frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢} - ١} \times \frac{\frac{١}{٢} - ١ + ٧ \; \frac{١}{٢} - ١٥}{\frac{١}{٢} + ١ - ٧ \; \frac{١}{٢} + ١} =$$

$$\frac{\frac{١}{٢} - ١ + ٧ \; \frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢} + ٧ \; \frac{١}{٢}} =$$

$$١ = \frac{٨}{٨} = \frac{\frac{١}{٢} - ٨ \; \frac{١}{٢}}{٨} =$$

يتبين لنا ان أي عدد من الرميات «و» اذا اخذناه ضمن «ن» من رميات قطعة النقد، وكان هذا العدد مساوياً في قيمته العددية لقيمة الحد [ن × هـ ـ(١ ـ هـ)] فسوف تكون قيمته الاحتمالية مساوية لقيمة احتمال (و + ١).

ونستطيع أن نبرهن أيضاً على أن عدد المرات، التي يظهر فيها وجه الصورة، اذا كان أصغر من الحد فسوف يكون احتمال (و) أصغر من احتمال (و + ١)، اذ لو افترضنا أن (و) أصغر من الحد فسوف يكون احتمال ظهور

وجه الصورة في (و) من المرات أصغر من احتمال ظهوره في (و + ١).

البرهان: يتبين هذا البرهان على افتراض ان (ن) = ١٥، و(هـ) = $\frac{١}{٢}$

$$\frac{\text{احتمال (و + ١)}}{\text{احتمال (و)}} = \frac{\text{ن} - \text{و}}{١ + \text{و}} \times \frac{\text{هـ}}{١ - \text{هـ}}$$

نعوض عن «و» بأي عدد هو أقل من الحد [ن × هـ ـ (١ ـ هـ)]، والحد في مثالنا يساوي «٧ » فلنعوض عن «و» بأي عدد هو أصغر من «٧ » ولو بـ $\frac{١}{\text{مليون}}$. حينئذ سنجد أن احتمال (و + ١) سيكبر عن احتمال «و».

$$\frac{\text{ن} - \text{و}}{١ + \text{و}} \times \frac{\text{هـ}}{١ - \text{هـ}} = \frac{\text{ن} - (٧ - \frac{١}{\text{مليون}})}{١ + ٧ - \frac{١}{١٠^{٦}}} \times \frac{\text{هـ}}{١ - \text{هـ}}$$

$$= \frac{١٥ - (٧ - \frac{١}{١٠^{٦}})}{١ + ٧ - \frac{١}{١٠^{٦}}} \times \frac{\frac{١}{٢}}{١ - \frac{١}{٢}}$$

$$= \frac{١٥ - ٧ + \frac{١}{١٠^{٦}}}{١ + ٧ - \frac{١}{١٠^{٦}}} \times \frac{\frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢}}$$

$$= \frac{٨ + \frac{١}{١٠^{٦}}}{٨ - \frac{١}{١٠^{٦}}}$$

وهذا يعني أن احتمال (و + ١) أكبر من احتمال (و) بـ $\frac{٢}{\text{مليون}}$

ونستطيع أن نبرهن أيضا على ان عدد «و» اذا زاد عن الحد بواحد، فسوف تكون قيمة احتمال «و» أكبر من قيمة احتمال «و + ١».

الفرض: ان «ن» = ١٥، وأن «و» أكبر من الحد بواحد،وان هـ = $\frac{١}{٢}$

البرهان:

$$\frac{\text{احتمال (و + ١)}}{\text{احتمال «و»}} = \frac{ن - و}{١ + و} \times \frac{هـ}{١ - هـ} = \frac{١٥ - ٧ - ١}{١ + ٧ + ١} \times \frac{\frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢}} = \frac{١٥ - ٨}{٩} = \frac{٧}{٩}$$

وهذا يعني ان قيمة احتمال «و» أكبر من قيمة احتمال (و + ١).

في ضوء ما تقدم اتضح لنا آنفاً اننا اذا قذفنا قطعة النقد «ن» مرة، واردنا

ان نتعرف على عدد المرات التي تتمتع بأكبر قيمة احتمالية لظهور وجه الصورة، فنستطيع ذلك عن طريق حساب القيمة الاحتمالية لكل اعداد المرات.

واتضح أيضاً ان عدد المرات اذا ساوى الحد فسوف تكون قيمته الاحتمالية مساوية لعدد المرات + ١. وان عدد المرات اذا كان أكبر من الحد بواحد فسوف تكون قيمته الاحتمالية اكبر من عدد المرات + ١ . وان عدد المرات اذا كان أصغر من الحد فسوف يكون احتمال عدد المرات + ١ اكبر من احتمال عدد المرات.

على هذا الاساس نستطيع ان نقول:اننا اذا قذفنا قطعة النقد «ن» مرة، فعدد المرات التي تتمتع باكبر قيمة احتمالية لظهور وجه الصورة يجب أن لا تكون أصغر من الحد، لانها لو كانت اصغر من الحد فسوف لا تكون العدد الذي يتمتع باكبر قيمة احتمالية لظهور وجه الصورة. لأن العدد المفروض + ١ سيكون أكبر قيمة من احتمال العدد المفروض .

∴ عدد المرات الأكبر احتمالا لظهور وجه الصورة يجب ان لا تكون أصغر من الحد، أي اصغر من [العدد الكلي لرميات قطعة النقد × قيمة احتمال ظهور وجه الصورة ـ (١ ـ قيمة احتمال ظهور وجه الصورة)]، واذا استخدمنا الرموز نقول ان اكبر قيمة لـ «و» في «ن» يجب أن لا تكون أصغر من [ن × هـ ـ (١ ـ هـ)]. كما نستطيع أن نقول على ضوء ما تقدم:

ان عدد المرات الأكبر احتمالا يجب أن لا تزيد على الحد بأكثر من

واحد. لان عدد المرات التي تساوي قيمة «الحد» تساوي في قيمتها الاحتمالية لعدد المرات + ١، وما يزيد عن الحد بواحد أكبر احتمالاً مما هو اكبر منه في عدد المرات.

∴ نستطيع أن نحصر عدد المرات التي تتمتع باكبر قيمة في المنطقة التي تبتدأ بالحد وتنتهي بالحد + ١.

أي من [العدد الكلي للرميات × قيمة احتمال الحادثة ـ (١ ـ قيمة احتمال الحادثة)] الى [العدد الكلي للرميات × قيمة احتمال الحادثة ـ (١ ـ قيمة احتمال الحادثة) + ١].

واذا استخدمنا الرموز يكون العدد الأكبر احتمالا مرددا بين:
[ن × هـ ـ (١ ـ هـ)] ↔ [ن × هـ ـ (١ ـ هـ) + ١].

ملاحظة(١):
لعلك تتساءل عن مصدر قاعدة التوافيق، ومن اين تستمد هذه القاعدة قيمتها البرهانية، أي من أين تأتي المعادلة التي تقول: عدد صور (م) في (ن)

$$= \frac{\text{ن !}}{\text{م! (ن ـ م)!}} ؟$$

نبدأ بالمثال التالي:

لدينا عشرون كرة قذفها اللاعبون على الهدف، وكانت ثلاث كرات فقط من هذه العشرين كرة قد أصابت الهدف، فلوّناها باللون الابيض ولوّنا سائر الكرات باللون الاحمر، ثم أخذنا الكرات العشرين، فوضعناها في صندوق مغلق ثم أردنا سحب ثلاث كرات من الصندوق فما هي قيمة احتمال ان تخرج الكرات الثلاثة كلها بيضاء؟

قبل أن نطبق المعادلات الرياضية ونخرج بنتيجة المسألة، نرجح أن نستفتي التفسير الاجمالي، لنرى كيف يعالج المسألة:

يقول التفسير الاجمالي: اننا حينما نريد سحب ثلاث كرات من حقيبة ذات عشرين كرة سنعلم اجمالا بصورة من احدى مجموعة صور، وقيمة احتمال ان تخرج الكرات الثلاثة بيضاء

$$= \frac{\text{عدد الصور التي تلازم هذه القضية}}{\text{المجموع الكلي لاطراف العلم الاجمالي}}$$

وحينما نستعين بالطريقة التي تقدمت في الفصل السابق لتحديد عدد اعضاء العلم الاجمالي، علينا بترقيم الكرات من (١) الى (٢٠)، ثم افتراض (٣) منها من (١) الى (٣) او (٥) الى (٧) او.........، هي الكرات البيضاء وحينئذ سنواجه الصور التالية:

١ـ أن تخرج (١، ٢، ٣).
٢ـ أن تخرج (١، ٢، ٤).
٣ـ أن تخرج (١، ٢، ٥).
٤ـ أن تخرج (١، ٢، ٦).
وهكذا الى........... ١١٤٠ صورة.

اذن: المجموع الكلي لأطراف العلم الاجمالي يساوي (١١٤٠) طرفاً، اما ما هي عدد الأطراف التي تلازم خروج الكرات الثلاثة بيضاء؟ عند مراجعة قائمة الصور (١١٤٠) نجدها صورة واحدة وطرفاً واحداً.

اذن قيمة احتمال خروج ثلاث كرات بيضاء = ١/١١٤٠.

نأتي الى حساب الاحتمال وقواعده، لنرى كيف تعالج المسألة. نلاحظ اننا نريد استخراج احتمال خروج الكرة الاولى بيضاء والثانية بيضاء والثالثة بيضاء، وفي مثل هذه المسألة لابد من تطبيق قاعدة الضرب، واستخدام بديهية الاتصال.

لنرمز الى احتمال خروج الكرة الاولى بيضاء بـ (ح «م») ولاحتمال خروج الكرة الثانية بيضاء بـ (ح «ث»)، ولاحتمال خروج الكرة الثالثة بيضاء بـ (ح«ل»)، ونحن نريد قياس درجة حدوث هذه الوقائع مجتمعة بالنسبة الى حادثة وجود عشرين كرة في الصندوق، ونرمز للمجموع الكلي للكرات بـ (ن).

نطبّق بديهية الاتصال، وحيث ان الاحتمالات مشروطة في المثال يلزم أن نجري قاعدة الضرب في الاحتمالات المشروطة، وسيكون لدينا:

$$\text{ح}\,\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \text{ح}\,\frac{\text{ث}}{\text{ن.م}} \times \text{ح}\,\frac{\text{ل}}{\text{ن.م.ث}}$$

$$\text{ح}\,\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{٣}{٢٠}\ *$$

$\text{ح}\,\frac{\text{ث}}{\text{ن م}} = \frac{٢}{١٩}$ ، لأن الاحتمالات هنا مشروطة، فخروج الكرة الثانية بيضاء على تقدير خروج الكرة الاولى بيضاء يعني على تقدير وجود (١٩) كرة، وكرتان منها بيضاوان.

$$\text{ح}\,\frac{\text{ل}}{\text{ن.م.ث}} = \frac{١}{١٨}$$

$$\text{ح}\,\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \text{ح}\,\frac{\text{ث}}{\text{ن.م}} \times \text{ح}\,\frac{\text{ل}}{\text{ن.م.ث}} = \frac{٣}{٢٠} \times \frac{٢}{١٩} \times \frac{١}{١٨}$$

$$= \frac{٣ \times ٢ \times ١}{٢٠ \times ١٩ \times ١٨} = \frac{٣\,!}{٢٠ \times (٢٠ - ١) \times [٢٠ - (٣ - ١)]}$$

---

* قيمة ح $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ تنسجم بوضوح مع التفسير الاجمالي للاحتمال. فنحن حينما نواجه الفرض نجد ان لدينا علماً اجمالياً بوجود ثلاث كرات بيضاء، ضمن عشرين كرة. وكل واحدة من الكرات يحتمل ان تكون احدى الكرات البيضاء.

اذن! المجموع الكلي لأطراف العلم الاجمالي = (٢٠) طرفاً. والاطراف التي في صالح خروج الكرة بيضاء = (٣) أطراف . واحتمال خروج الكرة بيضاء =

$$\frac{\text{عدد الاطراف التي تلازمها}}{\text{المجموع الكلي لعدد الاطراف}} = \frac{٣}{٢٠}$$

نعوض عن الارقام بالرموز م = ٣، ن = ٢٠، سوف يكون لدينا ما يلي:

$$\frac{٣\,!}{٢٠ \times (٢٠ - ١) \times [٢٠ - (٣ - ١)]} = \frac{م\,!}{ن \times (ن - ١) \times \ldots \times [ن - (م - ١)]}$$

اذن: احتمال خروج ثلاث كرات بيضاء اذا كانت لدينا عشرون كرة، ثلاث منها بيضاء =

$$\frac{م\,!}{ن \times (ن - ١) \ldots \times [ن - م - ١]}$$

$$= \frac{\text{عدد الاطراف التي تلازم خروج ثلاث كرات بيضاء}}{\text{المجموع الكلي لاطراف العلم الاجمالي}}$$

أي: $$\frac{\text{عدد الصور الملائمة لخروج ثلاث كرات بيضاء}}{\text{المجموع الكلي لصور خروج ثلاث كرات}}$$

اذن: اذا أردنا أن نعرف عدد صور (م) في (ن)، أي عدد صور (٣) في (٢٠) علينا ان نقلب الكسر، ويكون الكسر

على الشكل التالي: $$\frac{م\,!}{ن \times (ن - ١) \times \ldots [ن - (م - ١)]}$$

$$\frac{\text{ن} \times (\text{ن} - ١) \times ...... \times [\text{ن} - (\text{م} - ١)]}{\text{م} \,!}$$

ونستطيع تحويل هذا الكسر الى كسر آخر، وذلك بضرب (ن ـ م) ! في البسط والمقام معاً، حينئذ يكون لدينا:

$$\frac{\text{ن} \times (\text{ن} - ١) \times .... \times [\text{ن} - (\text{م} - ١)]}{\text{م} \,!}$$

$$= \frac{\text{ن} \times (\text{ن} - ١) \times .... \times [\text{ن} - (\text{م} - ١)] \times (\text{ن} - \text{م})!}{\text{م} \,! \times (\text{ن} - \text{م}) \,!}$$

$$= \frac{\text{ن} \,!}{\text{م} \,! \,(\text{ن} - \text{م}) \,!}$$

ونستطيع تكوين صورة اوضح عن هذه المعادلات، اذا استبدلنا الرموز بالارقام، وحيث ان (م) = ٣، و(ن) = ٢٠، و[ن ـ (م ـ ١)]= ١٨.

$$\text{اذن!} \quad \frac{\text{ن} \times (\text{ن} - ١) \times .... \times [\text{ن} - (\text{م} - ١)]}{\text{م} \,!}$$

$$= \frac{٢٠ \times ١٩ \times ١٨}{٣ \times ٢ \times ١}$$

نضرب بسط الكسر ومقامه بكمية واحدة، وهي (ن ـ م) !، وحيث أن (ن ـ م)!= (٢٠ ـ ٣)! = (١٧)!.

$$\text{حينئذ:} \quad \frac{٢٠ \times ١٩ \times ١٨}{٣ \times ٢ \times ١} = \frac{٢٠ \times ١٩ \times ١٨ \times (١٧)\,!}{٣ \times ٢ \times ١ \times (١٧)\,!} = \frac{٢٠\,!}{٣\,! \times (١٧)!}$$

نعوّض عن الارقام بالرموز فيكون لدينا ما يلي:

$$\frac{\text{٢٠}!}{\text{٣}!\ \text{١٧}!} = \frac{\text{ن}!}{\text{م}!\,(\text{ن} - \text{م})!}$$

ملاحظة (٢):

قلنا ان الاحتمال الاكبر قيمة (م) يتراوح بين:

$$[\text{ن} \times \text{هـ} - (\text{١} - \text{هـ})] \leqslant \text{م} \leqslant [\text{ن} \times \text{هـ} - (\text{١} - \text{هـ}) + \text{١}]$$

واذا قسمنا حدود المتباينة على (ن) حينئذ تصح المتباينة التالية:

$$\frac{[\text{ن} \times \text{هـ} - (\text{١} - \text{هـ})]}{\text{ن}} \leqslant \frac{\text{م}}{\text{ن}} \leqslant \frac{[\text{ن} \times \text{هـ} - (\text{١} - \text{هـ}) + \text{١}]}{\text{ن}}$$

وحيث أن $\frac{\text{ن} \times \text{هـ} - (\text{١} - \text{هـ})}{\text{ن}} = \frac{\text{ن} \times \text{هـ}}{\text{ن}} - \frac{\text{١} - \text{هـ}}{\text{ن}}$

$= \text{هـ} - \frac{\text{١} - \text{هـ}}{\text{ن}}$ ، كما ان $\frac{[\text{ن} \times \text{هـ} - (\text{١} - \text{هـ}) + \text{١}]}{\text{ن}}$

$= \frac{\text{ن} \times \text{هـ}}{\text{ن}} + \frac{\text{هـ}}{\text{ن}} = \text{هـ} + \frac{\text{هـ}}{\text{ن}}$

$$\therefore\ \text{هـ} - \frac{\text{١} - \text{هـ}}{\text{ن}} \leqslant \frac{\text{م}}{\text{ن}} \leqslant \text{هـ} + \frac{\text{هـ}}{\text{ن}}$$

ملاحظة (٣):

لنفترض ان (هـ) التي هي رمز لقيمة احتمال وقوع الحادثة (وجه الصورة) في كل مرة من مرات رمي قطعة النقد تساوي $\frac{1}{2}$ ، حينئذ تصح المعادلة التالية:

$$\frac{1}{2} - \frac{1 - \frac{1}{2}}{\text{ن}} \leqslant \frac{\text{م}}{\text{ن}} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\text{ن}}$$

أي ان عدد المرات الاكثر احتمالا بالنسبة الى العدد الكلي لمرات قذف قطعة النقد يتراوح بين $\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{\text{ن}}$ ، و $\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\text{ن}}$

من هنا فكلما ازداد عدد (ن) فهذا يعني تضاؤل الكسرين $\frac{1 - \frac{1}{2}}{\text{ن}}$ و $\frac{\frac{1}{2}}{\text{ن}}$ الى درجة يمكن معها اهمالها، وتكون $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ بين $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ ، أي مساوية للنصف.

على هذا الأساس يصح لنا في ضوء معادلات وتوزيع برنولي أن نقرر الحقيقة التالية:

(ان عدد المرات الاكبر احتمالا يميل بزيادة العدد الكلي للاختبارات الى الاقتراب من قيمة احتمال الحادثة منفردة، وعندما تزداد الاختبارات بشكل كبير يمكننا ان نؤكد ان عدد المرات الاكبر احتمالا بالنسبة لعدد الاختبارات، التي اجريناها، يساوي قيمة احتمال الحادثة منفردة).

* * *

امثلة حول معادلات برنولي:

المثال الاول:

القيت خمس قطع نقدية الى الاعلى فما هي قيمة احتمال ظهور وجه الصورة في قطعه واحدة، وفي قطعتين، وفي ثلاث، وفي أربع، وفي خمس، واحتمال أن لا يظهر في القطع الخمس.

الحل:

نفترض أن قطعة النقد طبيعية وسالمة، حيث يكون احتمال ظهور الصورة $\frac{١}{٢}$ ، ونرمز الى احتمال ظهور الصورة بـ (ح)، وعلى أساس معادلات برنولي نستطيع تحديد قيم الاحتمالات الستة:

$$ح١ = \frac{٥!}{١!(٥-١)!} \times \frac{١}{٢} \times (\frac{١}{٢})^{٥-١}$$

$$= \frac{٥!}{٤!} \times \frac{١}{٢} \times (\frac{١}{٢})^{٤}$$

$$= ٥ \times \frac{١}{٢^{٥}} = \frac{٥}{٣٢}$$

$$ح٢ = \frac{٥!}{٢!(٥-٢)!} \times (١/٢)^{٢} \times (١/٢)^{٥-٢}$$

$$= \frac{٥ \times ٤ \times ٣!}{٢ \times ٣!} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}.$$

$$= \frac{٥ \times ٤}{٢} \times \frac{١}{٢^{٥}} = \frac{١٠}{٣٢}$$

$$\text{ح}_{٣} = \frac{٥!}{٣!\,(٥-٣)!} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥-٣}$$

$$= \frac{٥ \times ٤ \times ٣!}{٣! \times ٢!} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$$

$$= \frac{٥ \times ٤}{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$$

$$= \frac{١٠ \times ١}{٢^{٥}} = \frac{١٠}{٣٢}$$

$$\text{ح}_{٤} = \frac{٥!}{٤!\,(٥-٤)!} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥-٤}$$

$$= ٥ \times (\tfrac{١}{٢})^{٤} \times (\tfrac{١}{٢})$$

$$= \frac{٥}{٢^{٥}} = \frac{٥}{٣٢}$$

$$ح_{٥} = \frac{!٥}{!٥ \times !(٥ - ٥)} \times (\tfrac{١}{٢})^{٥} \times (\tfrac{١}{٢})^{٥-٥}$$

$$= ١ \times (\tfrac{١}{٢})^{٥} = \frac{١}{٣٢}$$

$$ح_{٠} = \frac{!٥}{!٠ \times !(٥ - ٠)} \times (\tfrac{١}{٢})^{٠} \times (\tfrac{١}{٢})^{٥-٠}$$

$$= \frac{!٥}{!٥} \times (\tfrac{١}{٢})^{٠} \times \frac{١}{٢^{٥}} = ١ \times ١ \times \frac{١}{٣٢}$$

اذن! $ح_{٠} = \frac{١}{٣٢}$.

ولاجل معرفة العدد الاكبر احتمالا لظهور الصورة في هذا المثال يمكننا تطبيق القاعدة:

[ن × هـ ـ (١ ـ هـ)] ↤ [ن × هـ ـ (١ ـ هـ) + ١].

حيث سوف يكـون العدد الأكبر احتمالا محصورا في هذه المنطقة ولأجل معرفة عدد المرات الاكبر احتمالا، نفرض :

هـ = قيمة احتمال الحادثة منفردة.

ن = العدد الكلي للمرات.

م = عدد المرات الاكبر احتمالا.

حينئذ نحصل على ما يلي:

$(٥ \times {}^{١}/_{٢} - ١ + {}^{١}/_{٢}) \longleftrightarrow (٥ \times {}^{١}/_{٢} - ١ + {}^{١}/_{٢} + ١)$.

$({}^{١}/_{٢} ٢ - ١ + {}^{١}/_{٢}) \longleftrightarrow ({}^{١}/_{٢} ٢ + {}^{١}/_{٢})$

$٢ \longleftrightarrow ٣$.

فالعددان ٢، ٣ هما الأكبر احتمالا، وهذا مطابق تماماً لما تم حسابه وفق قاعدة التوافيق.

حيث كان $ح_٢ = \frac{١٠}{٣٢}$ ، و$ح_٣ = \frac{١٠}{٣٢}$ ايضاً وباقي الاحتمالات أقل من ذلك.

المثال الثاني:

اتضح من خلال المشاهدات المتكررة ان نسبة سقوط المطر في اليوم الاول من شهر مارس $\frac{٤}{١٧}$ ، فما هو العدد الاكبر احتمالا لسقوط المطر في الاول من مارس في ظرف الخمسين سنة القادمة؟.

$هـ = \frac{٤}{١٧}$

ن = ٥٠.

نطبق قانون برنولي:

$[ن \times هـ - (١ - هـ)] \longleftrightarrow [ن \times هـ - (١ - هـ) + ١]$.

$= [٥٠ \times \frac{٤}{١٧} - \frac{١٣}{١٧}] \leftrightarrow [٥٠ \times \frac{٤}{١٧} - ١ + \frac{٤}{١٧} + ١]$

$$= \frac{٢٠٠}{١٧} - \frac{١٣}{١٧} \leftrightarrow \frac{٢٠٠}{١٧} + \frac{٤}{١٧}$$

$$= \frac{١٨٧}{١٧} \leftrightarrow \frac{٢٠٤}{١٧}$$

$$= ١١ \leftrightarrow ١٢.$$

اذن: الاحتمال الاكثر وقوعاً لسقوط المطر في أول مارس خلال خمسين عاما هو (١١، ١٢) يوماً.

المثال الثالث:

اذا علم أن ربع عدد عمال مؤسسة من المؤسسات يحملون شهادة البكالوريا، فاذا اخترنا (١٥٠٠) عاملاً من العمال بشكل عشوائي، أوجد الاحتمال الاكبر لعدد العمال الحاصلين على شهادة البكالوريا من (١٥٠٠) عاملاً.

الحل:

م يقع في المنطقة:

[ن × هـ ـ (١ ـ هـ)] ↔ [ن × هـ ـ (١ ـ هـ) + ١].

$$[١٥٠٠ \times \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤}] \leftrightarrow [١٥٠٠ \times \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}]$$

$$٣٧٥ - \frac{٣}{٤} \leftrightarrow ٣٧٥ + \frac{١}{٣}.$$

اذن: العدد الاكبر احتمالا للحاصلين على شهادة البكالوريا من (١٥٠٠) عاملًا اخترناهم عشوائياً يساوي (٣٧٥) عاملًا.

ملاحظة:

يمكن استبدال الاشارة ←م→ التي تعني ان القيمة الأكبر احتمالا تتردد بين الحد وما يزيد عنه بواحد، اي ليست أصغر من الحد ولا اكبر منه بأكثر من واحد ـ يمكن استبدالها بالشارة الرياضية ≶ التي تعني أكبر أو يساوي فتكون المتباينة:

[ن × هـ ـ (١ ـ هـ)] ≥ م ≥ [ن × هـ ـ (١ ـ هـ) + ١].

ثانياً: نظرية برنولي« النص»

(اذا اجرينا مجموعة مكونة من عدد كبير من الاختبارات (ن) يمكننا ان نتوقع باحتمال قريب من الواحد وقوع الحادثة (آ) عددا من المرات (ك) بحيث تكون (ك) قريبة جدا من القيمة الأكبر احتمالا، ويختلف هذا العدد عن القيمة الاكبر احتمالا بمقدار صغير جدا بالنسبة لعدد الاختبارات (ن)، التي نجريها).

اثبات نظرية برنولي:

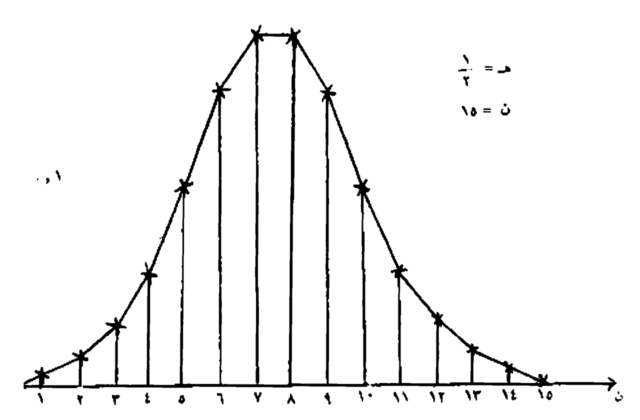
اتضح من النص السابق لنظرية برنولي ان هذه النظرية تؤكد على ان عدد المرات التي تقع فيها الحادثة (آ) تصبح قريبة جداً من عدد المرات الأكثر احتمالاً لوقوع الحادثة اذا كانت الاختبارات كثيرة جداً، ولأثبات ذلك لابد ان يثبت ايضا ان القيم الاحتمالية التي يمثلها عدد المرات الأكبر

احتمالاً وما يقرب منها تشكل قيمة كبيرة جداً من احتمالات (ن)، بحيث ان ما سواها من قيم احتمالية تبلغ درجة من الصغر، يمكن معها اهمال هذه القيم والتأكيد على ان قيمة (م) وما حواليها تساوي (١) تقريباً.

وقد استدعى اثبات هذه النظرية واقامة البرهان الرياضي عليها استخدام معادلات رياضية معقدة وطويلة، لكن هناك طريقة رياضية للبرهنة على اثبات نظرية (برنولي) ابتكرها العالم الروسي (تشيبيتشف) يعتبرها المختصون من أسهل وأخصر الطرق لاثبات نظرية برنولي.

لعلنا نقترب من فهم اثبات نظرية برنولي، بل نقترب أيضاً من فهم توزيع برنولي اذا استعنا بالرسوم البيانية لتوضيح مفاهيم التوزيع والنظرية، التي أقامها برنولي على أساسها، ونحن هنا نحاول الافادة من الرسم البياني، الذي يوضح فكرة التوزيع، والرسم البياني الذي يوضح اثبات (تشيبيتشف).

* * *



يوضح هذا الرسم البياني العلاقة بين عدد المرات المفترضة لوقوع الحادثة، وبين درجة احتمال كل واحدة من المرات المفترضة، وعدد المرات المفترضة في هذاالرسم البياني (١٥) مرة.

ان الخطوط العمودية التي يحتوي عليها الهرم المرسوم في وسط الدالة تشير الى قيمة الاحتمال، ومن الواضح ان الخطين (٧، ٨) هما أكبر الخطوط، كما انهما متساويان، وهذا يعني: ان (٧، ٨) في (ن) من المرات هي المرات الأكثر احتمالاً لظهور وجه الصورة، الذي كان احتماله مساوياً لـ ($\frac{١}{٢}$) في كل رمية منفردة، وهذه الحقيقة التي يؤشرها الرسم البياني تمّ اثباتها من خلال معادلات برنولي.

لكن حقيقة أُخرى يطرحها الرسم البياني بوضوح، ولم نستنتجها

من معادلات برنولي، الحقيقة هي ان احتمال عدد المرات يأخذ بالصعود، حتى يصل الى اعلى نقطة في الهرم، ثم يأخذ بالهبوط حتى يصل الى ما يقرب من الصفر، على ان الهبوط يتناسب تناسباً كاملاً مع الصعود، فكما ان قوس الصعود يخترق نقاطا محددة يخترق قوس النزول ايضا نفس النقاط، وهذا موضح أيضاً في الرسم البياني، حيث أشرّنا على نقاط قوس الصعود بعلامة (×)، وعلى نقاط قوس النزول بعلامة (×).

اذا لاحظنا نقاط (×) قوس الصعود، والنزول ولاحظنا الاعمدة الرئيسية، التي تقف عند كل نقطة من النقاط، نجد تساوي كل عمودين رأسيين، فكل عمود في قوس الصعود يساوية عمود آخر في قوس النزول، وهذا يعني تساوي احتمالات المرات التي يمثلها كل عمودين رأسيين متساويين.

وتستطيع استنتاج هذه المعادلة من معادلات برنولي المتقدمة.

لاحظ الرسم البياني، وافترض أي واحدة من المرات (م)، تجد أن احتمال (م) من (ن) يساوي احتمال (ن ـ م) في (ن).

اذن: المطلوب استنتاجه من معادلات برنولي هو المعادلة التالية:

$$ح_{ن} (م) = ح_{ن} (ن - م).$$

ولأجل اختصار البرهنة نستعين بحقيقة هامة جداً، أوضحتها الامثلة والقواعد السابقة بشكل لا غبار عليه، وهذه الحقيقة هي:

ان قيمة احتمال أي عدد من المرات يرتهن أساساً بعدد توافيق (م) في (ن)، اذا كانت (هـ) = $\frac{١}{٢}$ ، لأن احتمال (م) في (ن).

$$= \frac{ن\,!}{م\,!\,(ن - م)!} \times (هـ)^{م} \times (هـ)^{ن - م}$$

و $(\text{هـ})^{\text{م}} \times (\text{هـ})^{\text{ن}-\text{م}}$ تبقى ثابتة في كل عدد من المرات. وثباتها في مثالنا واضح جدا، اذ ما دام (هـ)= $\frac{١}{٢}$ ، أي أن (هـ) = (١ ـ هـ) فسوف يكون:

$$(\text{هـ})^{\text{م}} \times (\text{هـ})^{\text{ن}-\text{م}} = (\text{هـ})^{\text{ن}-\text{م}} \times (\text{هـ})^{\text{ن}-(\text{ن}-\text{م})}$$

انما الذي يتغير، وتتغير تبعاً له درجة الاحتمال هو عدد توافيق (م) في (ن)، ولأجل اثبات أن:

$(\text{ح}_{\text{ن}}(\text{م}) = \text{ح}_{\text{ن}}(\text{ن}-\text{م}))$.

نقتصر على اثبات التساوي بين عدد توافيق (م) في (ن)، وعدد توافيق (ن ـ م) في (ن).

توافيق (م) في (ن) = $\frac{\text{ن}!}{\text{م}!(\text{ن}-\text{م})!}$

اما توافيق (ن ـ م) فهي تساوي:

$$\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{م})!\,[\text{ن}-(\text{ن}-\text{م})]!}$$

$$= \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{م})!\,(\text{ن}-\text{ن}+\text{م})!}$$

$$= \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{م})!\,(\text{م})!}$$

وبما ان: $\frac{\text{ن}!}{\text{م}!(\text{ن}-\text{م})!}$

$$= \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{م})!\,\text{م}!}$$

اذن : توافيق (م) في (ن) = توافيق (ن ـ م) في (ن)، وهذا يعني أن:

$ح_{ن}$ (م) = $ح_{ن}$ (ن – م).

وهذه المعادلة هي التي تبرهن لنا المقابلة المؤشرة في الرسم البياني بين:

١ ← ١٤   ٢ ← ١٣   ٣ ← ١٢   ٤ ← ١١   ٥ ← ١٠

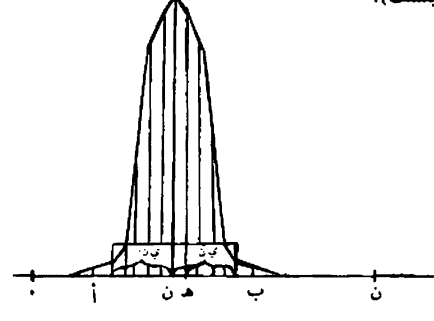
٦ ← ٩   ٧ ← ٨ .   ومن هنا نستطيع أن نستنتج ان العدد الكلي للمرات (ن) اذا كان عدداً فردياً، فـ (م) أي العدد الأكبر احتمالاً سوف يكون متمثلاً في عددين صحيحين،

ومن هنا رجحنا الصيغة:

الحد ≽ م ≽ ما يزيد على الحد بواحد على الصيغة التي جاءت في كتاب (الأسس المنطقية للاستقراء):

الحد ≽ م > ما يزيد على الحد بواحد، لان الصيغة (≽ م >) تلائم حالة ما اذا كانت عدد المرات (ن) متمثلة في رقم زوجي.

نأتي لملاحظة الرسم البياني، الذي يؤشر النقاط الرئيسية في اثبات (تشبيتشف).



يوضح هذا الرسم البياني المفردات والاسلوب الذي تمّ به لـ (تشيبتشف) اثبات نظرية برنولي.

وقبل أن ناتي الى عرض اثبات (تشيبتشف) يجب تحديد مفاهيم الحدود الرمزية، التي اعتمدها هذا الاثبات تحديداً واضحاً، وعلينا ان نحتفظ بشكل كامل بهذه المفاهيم ومعادلاتها الرمزية في أذهاننا.

لكي يتسنى لنا متابعة هذا الاثبات الذي يبدو معقداً، لكن وضوح التطابق بين الرمز ودلالته يساعدنا كثيراً على فهم هذا الاثبات وتذوق طعمه الشيق، واليك الرموز ودلالاتها:

ن: العدد الكلي للاختبارات.

م: الاختبارات الناجحة.

هـ: احتمال وقوع الحادثة بشكل منفرد في كل اختبار من الاختبارات.

ح: الاحتمال بشكل عام.

ن هـ: عدد المرات الأكبر احتمالاً.

ي ن: عدد من الاختبارات صغير جداً ضمن (ن) من الاختبارات.

$\simeq$: يساوي تقريباً.

اثبات تشيبتشف:

نعود لنتذكر نص نظريّة (برنولي)، حيث تؤكد هذه النظرية: اننا اذا كانت لدينا (ن) كبيرة جدا، فان (هـ ن) وما يقرب جداً منها من المرات سوف تستحوذ على مجموعة كبيرة من الاحتمالات التي تتوزع على (م)، وان ما عدا (هـ ن) وما يقرب منها سيستحوذ على قيم احتمالية صغيرة جدا

بالنسبة لمجموع احتمالات (م)، بحيث يمكننا اهمالها، ونقول ان ح (هـ ن) وما يقرب منها يساوي رقم اليقين تقريبا.

وقد جاءت محاولة (تشيبتشف) لتثبت لنا ان ما تستحوذ عليه م ـ (هـ ن) وما يقرب جداً منها صغير صغراً كافياً يتيح لنا اهماله والقول بان ح (هـ ن)، وما يقرب منها جداً يساوي رقم اليقين (١) تقريباً.

وبغية ايضـاح اثبات (تشيبتشف) ايضاحاً كاملاً، نحدد الفرضية اولاً، ثم نحدد المطلوب اثباته، ثم نتسلسل مع البرهان خطوة خطوة:

فرضية الاثبات:

لدينـا عدد كبير من الاختبارات (ن) ولدينا ايضا (م)، وهو عدد الاختبارات الناجحة، و(هـ) عبارة عن قيمة احتمال وقوع الحادثة منفردة، وان (ن هـ) هي عدد الاختبارات الأكثر احتمالاً، لان:

هـ ن + هـ ≃ هـ ن.

هـ ن ـ (١ ـ هـ) ≃ هـ ن.

لأننا افترضنا ان (ن) كبيرة جداً، وأن هـ، (١ ـ هـ) صغيرة جداً.

ولدينا أيضاً (ي)، وهو مقدار صغير جداً من مجموع (ن)، بحيث تكون قيمته على حد $\frac{١}{١٠٠}$ أو $\frac{١}{١٠٠٠}$ من «ن».

المطلوب اثباته:

نريد أن نبرهن على ان (م) لا تزيد ولا تنقص عن (ن هـ) الا قليلاً، وان عدد الاختبارات الناجحة قريب جداً من (ن هـ)، بحيث ان الفارق

بينهما ليس الا مقداراً قليلاً من مراتب (ن) نسبته الى (ن) $\frac{١}{١٠٠}$ أو أقل.

ويمكننا التعبير عن هذه الحقيقة باسلوب آخر وبالطريقة الرمزية التالية:

ح (| م ـ ن هـ | > ي ن)..........(١).

ويمكن ايضاح المطلوب اثباته من خلال الرسم البياني، حيث نريد أن نثبت رياضياً ما هو مثبت في الرسم من ان (م ـ ن هـ)، التي تعني مجموع الاحتمالات، التي تقع خارج القطعة (آ ب) قليلة جداً، ففي الرسم البياني تمثل المستقيمات العمودية قيمة احتمال عدد المرات التي يحددها الخط الافقي، وواضح ان الاحتمالات الاساسية يستحوذ عليها (ن هـ)، وما يقرب منه جداً في المنطقة (آ ب)، اما المستقيمات العمودية التي تقع خارج هذه المنطقة فهي قليلة جدا بالنسبة الى مجموع المستقيمات الرأسية التي تقع في كل الهرم.

البرهان:

تقدم ان المطلوب حسابه عبارة عن قيمة احتمال عد الاختبارات الناجحة التي تقع على جانبي (آ، ب) وقد رمزنا الى هذا المطلوب بـ [ح (| م ـ ن هـ | > ي ن)]، ومجموع احتمالات مرات الاختبارات الناجحة يعبر عنه رياضياً بالصيغة التالية:

$$\sum_{م}^{ن} ح_{ن}(م)$$

أي ان : $ح(|م - ن هـ| > ي ن) = \sum_{|م - ن هـ| > ي ن} ح_{ن}(م)$ ....(٢)

ان حساب الطرف الايسر من المعادلة (٢) عسير جداً لعدم امكان تحديد جميع حدوده، لذا نغير شكل المعادلة الى متباينة ذات أبعاد محددة، يسهل ايجاد ناتجها رغم طولها، (وهذا ما فعله تشيبتشف).

نأخذ المتباينة م ـ هـ ن > ي ن، وبما أن م ـ هـ ن أكبر من ي ن، حينئذ نستطيع القول:

$$\left| \frac{م - هـ ن}{ي ن} \right| > ١.$$

وبتربيع البسط والمقام نحصل على:

$$\left(\frac{م - هـ ن}{ي ن} \right)^{٢} > ١.$$

نأخذ المعادلة رقم (٢) ونضرب طرفها الأيسر فقط بالمقدار :

$$\left(\frac{م - هـ ن}{ي ن} \right)^{٢}،$$

حينئذ ستتحول العلاقة بين طرفي المعادلة من المساواة الى التباين، ويكون طرفها الايمن هو الأكبر، لأننا ضربناها بمقدار أكبر من الواحد، أي ان المعادلة (٢) تتحول الى المتباينة التالية:

$$\text{ح}\left(|\text{م} - \text{هـ ن}| > \text{ي ن}\right) > \sum_{|\text{م} - \text{هـ ن}| > \text{ي ن}} \text{ح}_{\text{ن}}(\text{م}) \times \left(\frac{\text{م} - \text{هـ ن}}{\text{ي ن}}\right)^{٢}$$

أي ان:

$$\text{ح}\left(|\text{م} - \text{هـ ن}| > \text{ي ن}\right) > \frac{١}{\text{ي}^{٢}\text{ن}^{٢}} \sum_{|\text{م} - \text{هـ ن}| > \text{ي ن}} (\text{م} - \text{هـ ن})^{٢}\, \text{ح}_{\text{ن}}(\text{م})$$

أن المتباينة اعلاه تبقى صحيحة كلما زدنا من حدود الطرف الأيسر منها، ففي المتباينة أعلاه نريد أن نحسب في الطرف الأيسر قيم (م) التي هي خارج المنطقة (آ ب) فقط. أما اذا أردنا ان نحسب قيم (م) من الصفر حتى (ن)، فالطرف الايسر يبقى اكبر من الطرف الايمن، وتصح المتباينة التالية:

$$\text{ح}\left(|\text{م} - \text{هـ ن}| > \text{ي ن}\right) > \frac{١}{\text{ي ن}} \sum_{\text{م}=٠}^{\text{ن}} (\text{م} - \text{هـ ن})^{٢}\, \text{ح}_{\text{ن}}(\text{م}) \ldots\ldots (٣)$$

ان المتباينة رقم (٣) هي الصيغة التي اعتمدها (تشيبتشف) لاقامة

البرهان على نظرية برنولي.

نأتي على حساب الطرف الايسر من المتباينة، أي حساب قيمة:

$$\frac{١}{ي^٢ ن^٢} \sum_{م=٠}^{ن} (م - ن هـ)^٢ ح_ن (م)$$

ولحساب مجموع قيمة هذا الطرف نتبع الخطوات التالية:

آ - نحتفظ بالمقدار $\frac{١}{ي^٢ ن^٢}$ في ذاكرتنا، على أن نضربه في آخر العملية بالناتج الكلي.

ب - يبقى لدينا : $\sum_{م=٠}^{ن} (م - ن هـ)^٢ ح_ن (م)$

نفتح القوس $(م - ن هـ)^٢ = م^٢ - ٢ م ن هـ + ن^٢ هـ^٢$.

اذن $\sum_{م=٠}^{ن} (م - ن هـ) = \sum_{م=٠}^{ن} (م^٢ - ٢ م ن هـ + ن^٢ هـ^٢) ح_ن (م)$

$$= \sum_{م=٠}^{ن} م^٢ ح_ن (م) - \sum_{م=٠}^{ن} ٢ م ن هـ ح_ن (م) + \sum_{م=٠}^{ن} ن^٢ هـ^٢ ح_ن (م)$$

(١) (٢) (٣)

نحسب قيمة كل حد من هذة الحدود الثلاثة على حدة ، ومن ثم نجمع نواتجها ونضربها بـ ($\frac{1}{ي^2 ن^2}$) التي نحتفظ بها.

جـ ـ نبدأ بالحد رقم (٣) لحساب قيمته:

$$\sum_{م=0}^{ن} هـ^2 ن^2 ح_ن (م) = ن^2 هـ^2 \sum_{م=0}^{ن} ح_ن (م)$$

ان المقدار : $\sum_{م=0}^{ن} ح_ن (م)$ عبارة عن احتمالات مجموعة متكاملة من الحوادث، لذلك فهو يساوي واحداً ، أي ان: $\sum_{م=0}^{ن} ح_ن (م) = 1$

اذن $ن^2 هـ^2 \sum_{م=0}^{ن} ح_ن (م) = ن^2 هـ^2 \times 1 = ن^2 هـ^2$، وهذه هي قيمة الحد الثالث.

د ـ نأخذ الحد الثاني: $\sum_{م=0}^{ن} 2 م ن هـ ح_ن (م)$

$$\sum_{م=0}^{ن} 2 م ن هـ ح_ن (م) = 2 ن هـ \sum_{م=0}^{ن} م ح_ن (م)$$

وهو يساوي صفراً، اذا كانت (م) = ٠ ،وذلك لان $\sum_{م=٠}^{ن} ٠ \times ح_{ن}(م) = ٠$

اذن نأخذ قيم (م) من م = ١ الى (ن) فيكون:

$$٢ ن هـ \sum_{م=٠}^{ن} م ح_{ن}(م) = ٢ ن هـ \sum_{م=١}^{ن} م ح_{ن}(م)$$

نحتفظ بـ (٢ هـ ن) في الذاكرة لنضربها بعد نهاية الخطوة (د) ونطبق معادلة برنولي على :

$$\sum_{م=١}^{ن} م ح_{ن}(م)$$

وسوف يكون لدينا: $\sum_{م=١}^{ن} \frac{م \times ن!}{م!(ن-م)!} \times هـ^{م} \times (١-هـ)^{ن-م}$

م ! = م (م ـ ١)!.

ن ! = ن (ن ـ ١)!.

(ن ـ م) ! = [(ن ـ ١) ـ (م ـ ١)]!.

حينئذ سوف نحصل على:

$$\sum_{م=١}^{ن} \frac{م \times ن\,(ن-١)!}{م \times (م-١)!\,[(ن-١)-(م-١)]!} \times هـ^{(م-١)} \times هـ \times (١-هـ)^{(ن-١)-(م-١)}$$

$$= هـ\,ن \sum_{م=١}^{ن} \frac{(ن-١)!}{(م-١)!\,[(ن-١)-(م-١)]!} \times هـ^{(م-١)} \times (١-هـ)^{(ن-١)-(م-١)}$$

نفرض اختصاراً ان (م ـ ١) = ل ، حينئذ ستكون علامة الجمع:

$$\sum_{ل=٠}^{ن-١}$$

وبما اننا نأخذ (ل) فسوف نبدأ من الصفر الى آخر مرات (ن) ،
وحيث ان ل = م ـ ١، تصبح ن = ن ـ ١. اذن ستكون المعادلة المتقدمة:

$$هـ\,ن \sum_{ل=٠}^{ن-١} \frac{(ن-١)!}{ل!\,[(ن-١)-ل]!} \times هـ^{ل} \times (١-هـ)^{(ن-١)-ل}$$

نحتفظ بـ (هـ ن) فيبقى لدينا:

$$\sum_{\text{ل} = ٠}^{\text{ن} - ١} \frac{(\text{ن} - ١)!}{\text{ل}! \, [(\text{ن} - ١) - \text{ل}]!} \times \text{هـ}^{\text{ل}} \times (١ - \text{هـ})^{(\text{ن} - ١) - \text{ل}}$$

$$= \sum_{\text{ل} = ٠}^{\text{ن} - ١} \text{ح}_{\text{ن} - ١} (\text{ل})$$

ومن الواضح ان المجموع الاخير: $\sum_{\text{ل} = ٠}^{\text{ن} - ١} \text{ح}_{\text{ن} - ١} (\text{ل})$

يساوي واحدا صحيحاً؛ لأنه عبارة عن حاصل جمع احتمالات مجموعة متكاملة من الحوادث(جميع الاعداد ل الممكنة لوقوع الحادثة، عندما نجري ن ـ ١ من الاختبارات).

وبذلك نكون قد حصلنا على:

$\text{ن هـ} \times ١ = \text{ن هـ}$.

اذن $\sum_{\text{م} = ١}^{\text{ن}} \text{م ح}_{\text{ن}} (\text{م}) = \text{ن هـ}$

$$2\text{هـ} ن \sum_{م=0}^{ن} م\, ح_{ن}(م) = 2\text{هـ} ن \times \text{هـ}ن = 2\text{هـ}^{2} ن^{2}$$
، وهذه هي قيمة الحد الثاني.

هـ ـ نأتي هنا لحساب قيمة الحد الاول، الذي هو عبارة عن:

$$\sum_{م=0}^{ن} م^{2} ح_{ن}(م)$$

$م^{2} = م^{2} + م - م.$

$م^{2} = (م^{2} - م) + م.$

$م^{2} = م(م - 1) + م.$

نعوّض وسوف يكون:

$$\sum_{م=0}^{ن} م^{2} ح_{ن}(م) = \sum_{م=0}^{ن} [م(م-1) + م]\, ح_{ن}(م)$$

$$= \sum_{م=0}^{ن} م(م-1)\, ح_{ن}(م) + \sum_{م=0}^{ن} م\, ح_{ن}(م)$$

الحد الاول يساوي (٠) صفراً، للقيم (م = ٠) و (م = ١)، اذن! نبدأ في حسابه من (م = ٢) فيكون لدينا:

$$\sum_{\text{م}=٠}^{\text{ن}} \text{م}(\text{م}-١)\,\text{ح}_{\text{ن}}(\text{م}) = \sum_{\text{م}=٢}^{\text{ن}} \text{م}(\text{م}-١)\,\text{ح}_{\text{ن}}(\text{م})$$

وتطبيقاً لمعادلة برنولي سنحصل على:

$$\sum_{\text{م}=٠}^{\text{ن}} \frac{\text{م}(\text{م}-١)\,\text{ن}!}{\text{م}!\,(\text{ن}-\text{م})!} \times \text{هـ} \times (١-\text{هـ})^{\text{ن}-\text{م}}$$

$$= \sum_{\text{م}=٢}^{\text{ن}} \frac{\text{م}(\text{م}-١)\,\text{ن}!}{\text{م}(\text{م}-١)(\text{م}-٢)!\,(\text{ن}-\text{م})!} \times \text{هـ}^{\text{م}} \times (١-\text{هـ})^{\text{ن}-\text{م}}$$

$$= \sum_{\text{م}=٢}^{\text{ن}} \frac{\text{ن}!}{(\text{م}-٢)!\,(\text{ن}-\text{م})!} \times \text{هـ}^{\text{م}} \times (١-\text{هـ})^{\text{ن}-\text{م}}$$

$\text{ن}-\text{م} = (\text{ن}-٢)-(\text{م}-٢)$.

$\text{هـ}^{\text{م}} = \text{هـ}^{٢} \times \text{هـ}^{\text{م}-٢}$

فيكون:

$$\sum_{\text{م} = ٢}^{\text{ن}} \frac{\text{ن}!}{(\text{م} - ٢)!\,(\text{ن} - \text{م})!} \times \text{هـ}^{\text{م}} \times (١ - \text{هـ})^{\text{ن} - \text{م}}$$

$$= \sum_{\text{م} = ٢}^{\text{ن}} \frac{\text{ن}\,(\text{ن} - ١)\,(\text{ن} - ٢)!}{(\text{م} - ٢)!\,[(\text{ن} - ٢) - (\text{م} - ٢)]!} \times \text{هـ}^{٢} \times \text{هـ}^{\text{م} - ٢} \times$$

$$(١ - \text{هـ})^{(\text{ن} - ٢) - (\text{م} - ٢)}$$

$$= \text{ن}\,(\text{ن} - ١)\,\text{هـ}^{٢} \sum_{\text{م} = ٢}^{\text{ن}} \frac{(\text{ن} - ٢)!}{(\text{م} - ٢)!\,[(\text{ن} - ٢) - (\text{م} - ٢)]!} \times \text{هـ}^{\text{م} - ٢} \times$$

$$(١ - \text{هـ})^{(\text{ن} - ٢) - (\text{م} - ٢)}$$

نفرض ان (م - ٢) = ك.

حينئذ يكون لدينا:

$$\text{ن}\,(\text{ن} - ١)\,\text{هـ}^{٢} \sum_{\text{ك} = ٠}^{\text{ن}} \frac{(\text{ن} - ٢)!}{\text{ك}!\,(\text{ن} - ٢ - \text{ك})!} \times \text{هـ}^{\text{ك}} \times (١ - \text{هـ})^{(\text{ن} - ٢) - \text{ك}}$$

$$= \text{ن (ن - ١) هـ}^{٢} \sum_{\text{ك}=٠}^{\text{ن - م}} \text{ح}_{\text{ن}-٢}(\text{ك}) = [\,\text{ن (ن - ١) هـ}^{٢}\,] \times ١.$$

اذن

$$\sum_{\text{م}=٠}^{\text{ن}} \text{م (م - ١) ح}_{\text{ن}}(\text{م}) = \text{ن (ن - ١) هـ}^{٢}$$

وبما ان الحد الاول عبارة عن

$$\sum_{\text{م}=٠}^{\text{ن}} \text{م}^{٢}\, \text{ح}_{\text{ن}}(\text{م})$$

$$= \underbrace{\sum_{\text{م}=٠}^{\text{ن}} \text{م (م - ١) ح}_{\text{ن}}(\text{م})}_{(١)} + \underbrace{\sum_{\text{م}=٠}^{\text{ن}} \text{م ح}_{\text{ن}}(\text{م})}_{(٢)}$$

وان الحد (٢) من الحد الاول يساوي (ن هـ)، وان الحد (١) من الحد الاول يساوي:

[ن (ن - ١) هـ²].

اذن

$$\sum_{\text{م}=٠}^{\text{ن}} \text{م}^{٢}\, \text{ح}_{\text{ن}}(\text{م})$$

= [ن (ن ـ ١) هـ^{٢} + ن هـ].

= ن^{٢} هـ^{٢} ـ ن هـ^{٢} + ن هـ ، وهذه هي القيمة النهائية للحد الاول.

و ـ كنا نحسب منذ الخطوة (ب) حتى الان قيمة :

$$\sum_{م = ٠}^{ن} (م - ن\ هـ)^{٢}\ ح_{ن}\ (م)$$

وكانت عبارة عن:

$$\underbrace{\sum_{م = ٠}^{ن} م^{٢}\ ح_{ن}\ (م)}_{(١)} - \underbrace{٢ \sum_{م = ٠}^{ن} م\ ن\ هـ\ ح_{ن}\ (م)}_{(٢)} + \underbrace{\sum_{م = ٠}^{ن} ن^{٢}\ هـ^{٢}\ ح_{ن}\ (م)}_{(٣)}$$

وبما ان قيمة الحد الاول = (ن^{٢} هـ^{٢} ـ ن هـ^{٢} + ن هـ)، كما تم حساب ذلك في الخطوة (هـ) .

وقيمة الحد الثاني، كما تم حسابها في الخطوة (د) عبارة عن (٢ هـ^{٢} ن^{٢}).

وقيمة الحد الثالث، كما تم حسابها في الخطوة(جـ)عبارة عن (ن^{٢} هـ^{٢}).

اذن $\sum_{م = ٠}^{ن} (م - هـ\ ن)^{٢}\ ح_{ن}\ (م)$

$$= (\text{ن}^2\,\text{هـ}^2 - \text{ن}\,\text{هـ}^2 + \text{ن}\,\text{هـ}) - 2\,\text{هـ}^2\,\text{ن}^2 + \text{ن}^2\,\text{هـ}^2.$$

$$= \text{ن}\,\text{هـ} - \text{ن}\,\text{هـ}^2.$$

$$= \text{ن}\,\text{هـ}\,(1 - \text{هـ}).$$

ز ـ نعود لنتذكر اننا منذ الخطوة (آ) أردنا حساب قيمة:

$$\frac{1}{\text{ي}^2\,\text{ن}^2}\sum_{\text{م}=0}^{\text{ن}} (\text{م} - \text{ن}\,\text{هـ})^2\,\text{ح}_{\text{ن}}(\text{م})$$

وقد اخرجنا $\frac{1}{\text{ي}^2\,\text{ن}^2}$ لنضربه في آخر خطوة.

$$\text{اذن } \frac{1}{\text{ي}^2\,\text{ن}^2}\sum_{\text{م}=0}^{\text{ن}} (\text{م} - \text{ن}\,\text{هـ})^2\,\text{ح}_{\text{ن}}(\text{م})$$

$$= \text{ن}\,\text{هـ}\,(1 - \text{هـ}) \times \frac{1}{\text{ي}^2\,\text{ن}^2}$$

$$= \frac{\text{هـ}\,(1 - \text{هـ})}{\text{ي}^2\,\text{ن}}$$

ح ـ كانت لدينا المتباينة رقم (٣):

$$\text{ح}\,(|\text{م} - \text{هـ}\,\text{ن}| > \text{ي}\,\text{ن}) < \frac{1}{\text{ي}^2\,\text{ن}^2}\sum_{\text{م}=0}^{\text{ن}} (\text{م} - \text{ن}\,\text{هـ})^2$$

وبما ان الطرف الايسر لهذه المتباينة يساوي:

$$\frac{\text{هـ (١ - هـ)}}{\text{ي}^{٢}\ \text{ن}}$$

اذن: $\text{ح} \left(\left| \text{م - هـ ن} \right| > \text{ي ن} \right) < \frac{\text{هـ (١ - هـ)}}{\text{ي}^{٢}\ \text{ن}}$

علينا أن نعود الى اللغة العادية لنتفهم مضمون هذه المتباينة. فالطرف الايمن يعني قيمة احتمال أن يكون الفارق بين الاختبارات الناجحة (م)، وبين عدد المرات الاكبر احتمالا (هـ ن) اكبر من مقدار صغير جدا (ي ن).

وقد أثبتنا ان قيمة هذا الاحتمال أصغر من $\frac{\text{هـ (١ - هـ)}}{\text{ي}^{٢}\ \text{ن}}$

نأتي الى ($\frac{\text{هـ (١ - هـ)}}{\text{ي}^{٢}\ \text{ن}}$) . فنحن نعرف ـ كما تقدّم في اصل الفرضية ـ

ان : هـ = قيمة احتمال الحادثة في كل مرة منفردة.

ي ن = هي نسبة صغيرة جداً في (ن) من المرات. وكل من قيمة (هـ) وقيمة (ي) في (ن) اخذنا كأمرين ثابتين في فرضية البرهان.

اذن قيمة : $\frac{\text{هـ (١ - هـ)}}{\text{ي}^{٢}\ \text{ن}}$ ترتهن أساساً بعدد (ن) فكلما كان عدد (ن) كبيراً جداً كانت قيمة هذا الكسر ضئيلة جداً، بل قريبة من الصفر.

ط ـ بعد كل الخطوات المتقدمة نستطيع أن نستخلص :

ان قيمة احتمال وقوع الاختبارات الناجحة في عدد من المرات يصغر أو يكبر عن (هـ ن) (أي عدد المرات الأكبر احتمالاً) بمقدار صغير جداً، يساوي صفرا تقريبا اذا كانت (ن) كبيرة جدا.

اذن! (هـ ن) وما يقرب منها جدا ≃ ١.

وهذا هو اثبات نظرية برنولي.

* * *

ثالثاً ـ التفسير الاجمالي ونظرية برنولي:

نعود لنتذكر نتائج معادلات برنولي ونظريته، ويمكننا ان نضع هذه النتائج في النقاط الآتية:

النقطة الاولى ـ اعطتنا معادلات برنولي مقياساً لتحديد عدد الصور الممكنة لوقوع الحادثة في (م) ضمن (ن) من الاختبارات، أي قاعدة توافيق (م) في (ن)، وهو:

$$\frac{\text{ن}!}{\text{م}!\,(\text{ن} - \text{م})!}$$

النقطة الثانية ـ اعطتنا معادلات برنولي مقياساً لتحديد قيمة احتمال وقوع الحادثة في اي (م) من الاختبارات ضمن (ن) من الاختبارات، وهو :

$$\frac{\text{ن}!}{\text{م}!\,(\text{ن} - \text{م})!} \times (\text{هـ})^{\text{م}} \times (١ - \text{هـ})^{\text{ن} - \text{م}}.$$

النقطة الثالثة ـ أعطتنا معادلات برنولي مقياساً لتحديد عدد المرات التي تتساوى قيمتها الاحتمالية ضمن (ن) من الاختبارات، وكان عبارة عن: $\text{ح}_{\text{ن}}(\text{م}) = \text{ح}_{\text{ن}}(\text{م} - \text{ن})$.

النقطة الرابعة ـ حددت لنا معادلات برنولي (م)، التي تكون أكبر احتمالا في (ن) من الاختبارات.

النقطة الخامسة ـ أكدت نظرية برنولي على ان (م)، التي هي أكبر احتمالا، وما يقرب منها جدا تكون قيمها الاحتمالية مساوية لـ (١) تقريباً، اذا كان عدد (ن) كبيراً جداً.

ونحن هنا نحاول اختبار جدارة التفسير الاجمالي في ضوء النقاط الخمسة المتقدمة:

التفسير الاجمالي والنقطة الاولى:

اتضح لنا من خلال ما تقدم ان: $\frac{ن!}{م!\,(ن - م)!}$ مستنتجة من تطبيق قاعدة الضرب في الاحتمالات المشروطة.

وقد تقدم ايضاح الانسجام بين التفسير الاجمالي وقاعدة الضرب في الاحتمالات المشروطة.

التفسير الاجمالي والنقطة الثانية:

كان المقياس في النقطة الثانية عبارة عن:

$$\frac{ن!}{م!\,(ن - م)!} \times (هـ)^{(م)} \times (١ - هـ)^{(ن - م)}.$$

درسنا في النقطة الأولى انسجام التفسير الاجمالي والكسر $\frac{ن!}{م!\,(ن - م)!}$ ، يبقى هنا ان نتعرف على مفهوم ضرب $(هـ)^{(م)} \times (١ - هـ)^{(ن - م)}$.

نعود الى مثال قطعة النقد، وقد افترضنا اننا قد قذفناها (٥) مرات، فما هو احتمال ان يخرج وجه الكتابة في المرات الخمسة؟.

نطبق قاعدة الضرب في الاحتمالات المستقلة فيكون:

$ح\ ٥\ ك = (\frac{١}{٢})^{٥} = \frac{١}{٣٢}$ ، وهذا الكسر الذي يمثل قيمة $ح_{٥}$ ك

يعني وفق التفسير الاجمالي $\frac{\text{عدد الاطراف التي تلازم ح ٥ ك}}{\text{المجموع الكلي لأطراف العلم الاجمالي}}$

اذن: فنحن حينما نقذف قطعة النقد خمس مرات نواجة علماً اجمالياً

مؤلفا من (٣٢) صورة:

١ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة الاولى فقط.

٢ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة الثانية فقط.

٣ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة الثالثة فقط.

٤ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة الرابعة فقط.

٥ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة الخامسة فقط.

٦ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٢،١) فقط.

٧ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٣،١) فقط.

٨ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٤،١) فقط.

٩ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،١) فقط.

١٠ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٣،٢) فقط.

١١ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٤،٢) فقط.

١٢ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،٢) فقط.

١٣ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٤،٣) فقط.

١٤ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،٣) فقط.

١٥ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،٤) فقط.

١٦ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٣،٢،١) فقط.

١٧ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٤،٢،١) فقط.

١٨ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٤،٣،١) فقط.

١٩ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،٤،١) فقط.

٢٠ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،٣،١) فقط.

٢١ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،٢،١) فقط.

٢٢ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٤،٣،٢) فقط.

٢٣ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،٣،٢) فقط.

٢٤ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،٤،٢) فقط.

٢٥ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،٤،٣) فقط.

٢٦ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٤،٣،٢،١) فقط.

٢٧ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،٣،٢،١) فقط.

٢٨ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،٤،٢،١) فقط.

٢٩ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،٤،٣،١) فقط.

٣٠ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،٤،٣،٢) فقط.

٣١ـ ان يظهر وجه الكتابة في المرة (٥،٤،٣،٢،١)

٣٢ـ ان لايظهر وجه الكتابة في المرات الخمسة.

اذن! نحن امام (٣٢) طرفاً، وطرف واحد منها فقط في صالح ظهور وجه الكتابة في المرات الخمسة، وحينما نلاحظ جدول الصور المتقدمة، التي تمثل عدد اطراف العلم الاجمالي، نجد أن عشر صور منها في صالح ظهور وجه الكتابة ثلاث مرات ضمن خمس رميات. وهذا يعني ان احتمال ظهور وجه الكتابة ثلاث مرات في خمس رميات يساوي $\frac{١٠}{٣٢}$ ، أي يساوي:

$$\frac{\text{عدد الاطراف التي تلازم ظهور وجه الكتابة ثلاث مرات}}{\text{المجموع الكلي لأطراف العلم الاجمالي}}$$

حينما نعود الى مقياس حساب قيمة احتمال ظهور وجه الكتابة ثلاث مرات (م) في خمس رميات نجده يقول:

$$\frac{\text{ن}!}{\text{م}!\,(\text{ن} - \text{م})!} \times (\text{هـ})^{(\text{م})}\,(\text{هـ})^{(\text{ن} - \text{م})}.$$

أي: ان نضرب عدد توافيق (م) في (ن) × قيمة احتمال صورة واحدة من الصور.

$$= ١٠ \times \frac{١}{٣٢} = \frac{١٠}{٣٢}$$

وهذا هو عين الكسر الذي يقوله التفسير الاجمالي.

التفسير الاجمالي والنقطة الثالثة:

المقياس المعطى في النقطة الثالثة عبارة عن : $\text{ح}_{\text{ن}}\,(\text{م}) = \text{ح}_{\text{ن}}\,(\text{م} - \text{ن})$.

ونحن نعرف ان: $\text{ح}_{\text{ن}}\,(\text{م}) = \frac{\text{ن}!}{\text{م}!\,(\text{ن} - \text{م})!} \times (\text{هـ})^{\text{م}} \times (١ - \text{هـ})^{\text{ن} - \text{م}}$.

ونعرف أيضاً أن:

$$\text{ح}_{\text{ن}}\,(\text{م} - \text{ن}) = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{م})!\,[\text{ن} - (\text{ن} - \text{م})]!} \times (\text{هـ})^{\text{م}} \times (١ - \text{هـ})^{\text{ن} - (\text{ن} - \text{م})}.$$

وحيث أن (هـ) و (ن) رقمان ثابتان في كلا الاحتمالين، اذن:

$(\text{هـ})^{\text{م}} \times (\text{هـ})^{\text{ن} - \text{م}}$ ستكون واحدة في كلا الاحتمالين.

وبما ان $\frac{\text{ن}!}{\text{م}!\,(\text{ن} - \text{م})!} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{م})!\,[\text{ن} - (\text{ن} - \text{م})]!}$ ،

اذن $\text{ح}_{\text{ن}}\,(\text{م}) = \text{ح}_{\text{ن}}\,(\text{م} - \text{ن})$.

وهذا منسجم تماماً مع التفسير الاجمالي للاحتمال لان (ن) و(هـ) ثابتان، أي سوف يثبت لدينا المجموع الكلي لأطراف العلم الاجمالي، وبما أن عدد توافيق الحادثتين واحد.

اذن: تتساوى قيمة احتمال الحادثتين.

التفسير الاجمالي والنقطة الرابعة:

(م) التي تكون أكبر احتمالاً في معادلات برنولي، تقاس قيمتها وفق التعريف الاجمالي على أساس $\frac{\text{عدد الاطراف التي تلازمها}}{\text{المجموع الكلي لأطراف العلم الاجمالي}}$ ، أي عدد توافيقها بالنسبة الى المجموع الكلي للصور الممكنة.

و (م) الاكبر احتمالا هي الـ (م) التي تتمتع باكبر عدد من التوافيق، أي تحتل أكبر عدد من المراكز في أطراف العلم الاجمالي، اذاقسناها بأي (م) أخرى.

ونحن قد عرفنا من خلال ما تقدم أن قيمة احتمال أي (م) ترتهن بعدد توافيقها، و (م) الأكبر احتمالاً هي الـ (م) التي تستحوذ على أكبر عدد من التوافيق بين مجموع المرات المفروضة في (ن).

التفسير الاجمالي والنقطة الخامسة:

اتضح لنا من خلال عرض نظرية برنولي واثباتها)أن ما عدا (م) وما يقرب منها جداً لا يستحوذ الا على مقدار ضئيل جداً من قيمة المجموعة المتكاملة التي تمثل (١) أي رقم اليقين.

فكلما كبر عدد (ن) من الاختبارات كبر لدينا عدد (م) التي تستحوذ على أقل عدد من التوافيق، ومن ثم تضعف قيمها الاحتمالية، الى درجة يمكن اهمالها، بالنسبة لعدد التوافيق، وتبعاً له تكبر قيمة الاحتمال التي تستحوذ عليها (م) الأكبر احتمالاً وما يقرب منها جداً.

وهذا ينسجم بوضوح أيضاً مع التفسير الاجمالي، لأن (م) وما يحيط بها سوف يستحوذ على أكبر أطراف العلم الاجمالي، وكلما كبر عدد اطراف العلم الاجمالي يصبح ما عدا (م) وما يقرب منها جدا يمثل قيمة ضئيلة جدا، بحيث يمكن اهمالها، والقول ان:

$$\frac{\text{عدد الاطراف التي تلازم (م) وما يقرب منها}}{\text{المجموع الكلي لاطراف العلم الاجمالي}} \simeq ١.$$

لكن هناك إشكالاً واضحاً، وهو ان ما تقدم يصدق في حالة واحدة فقط، وهي فيما اذا كانت هـ = $\frac{١}{٢}$.

ولأجل ايضاح ذلك نأخذ المثالين التاليين:

المثال الأول: رمينا قطعة النقد ثلاث مرات، وكانت (م) تعني ظهور

وجه الصورة.

ن = ٣.

$هـ = \frac{١}{٢}$.

أوجد قيم احتمالات (م)؟

الجواب:

من الواضح ان (م) تبدأ من الصفر الى ٣.

$$ح_{ن}(م)\left\langle{}^{٠}_{٣}\right\rangle = \frac{٣!}{٠!\,(٣-٠)!} \times \left(\frac{١}{٢}\right) \times \left(١ - \frac{١}{٢}\right)^{٣-٠} = ١ \times ١ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$$

$$= \frac{١}{٨} .$$

$$ح_{ن}(م)\left\langle{}^{١}_{٣}\right\rangle = \frac{٣!}{١!\,(٣-١)!} \times \left(\frac{١}{٢}\right) \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣-١} = ٣ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$$

$$= \frac{٣}{٨}$$

$$ح_{ن}(م)\left\langle{}^{٢}_{٣}\right\rangle = \frac{٣!}{٢!\,(٣-٢)!} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} \times \left(١ - \frac{١}{٢}\right)^{٣-٢} = ٣ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$$

$$= \frac{٣}{٨}$$

$$ح_{ن}(م)\left\langle{}^{٣}_{٣}\right\rangle = \frac{٣!}{٣!\,(٣-٣)!} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} \times \left(١ - \frac{١}{٢}\right)^{٣-٣} = ١ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$$

$$= \frac{١}{٨}$$

نلاحظ ان عدد توافيق هذه المجموعة المتكاملة = ٨.

كما نلاحظ ايضا ان المقام في كسر الاحتمال = ٨.

وهذا يعني ان قيمة احتمال كل (م) ترتهن مباشرة بعدد التوافيق التي تستحوذ عليها، وهذا يعني أننا نستطيع القول أننا نعلم اجمالاً باحدى الحوادث التالية:

١ـ ان لا يظهر وجه الصورة في كل المرات.

٢ـ ان يظهر في مرة واحدة.

٣ـ أن يظهر في مرتين.

٤ـ ان يظهر في ثلاث مرات.

وحيث ان الحادثة (١) لها صورة واحدة، والحادثة (٢) لها ثلاث صور، والحادثة (٣) لها ثلاث صور والحادثة (٤) لها صورة واحدة، يصبح علمنا الاجمالي مؤلفاً من ثمانية اطراف.

ويكون ح ن (م) (مْ) = $\frac{\text{عدد المراكز التي تحتلها الحادثة}}{\text{مجموع أطراف العلم الاجمالي}}$ = $\frac{١}{٨}$

وهكذا بقية الاحتمالات.

المثال الثاني: رمينا قطعة نقد مصممة بطريقة غير عادية ثلاث مرات، وكانت (م) تعني ظهور وجه الصورة:ن = ٣.

هـ = $\frac{٢}{٣}$

اوجد قيم احتمالات (م)؟

الجواب:

$$ح_{ن}(م)\left\langle \frac{٠}{٣} \right\rangle = \frac{٣!}{٠!\,(٣-٠)!} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٠} \times \left(١-\frac{٢}{٣}\right)^{٣-٠}$$

$$= ١ \times ١ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} = \frac{١}{٢٧}$$

$$ح_{ن}(م)\left\langle \frac{١}{٣} \right\rangle = \frac{٣!}{١!\,(٣-١)!} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{١} \times \left(١-\frac{٢}{٣}\right)^{٣-١}$$

$$= ٣ \times \frac{٢}{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} = \frac{٦}{٢٧}$$

$$ح_{ن}(م)\left\langle {}^{٢}_{٣} \right\rangle = \frac{٣!}{٢!\,(٣-٢)!} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \times \left(١-\frac{٢}{٣}\right)^{٣-٢}$$

$$= ٣ \times \frac{٤}{٩} \times \frac{١}{٣} = \frac{١٢}{٢٧}$$

$$ح_{ن}(م)\left\langle {}^{٣}_{٣} \right\rangle = \frac{٣!}{٣!\,(٣-٣)!} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} \times \left(١-\frac{٢}{٣}\right)$$

$$= ١ \times \frac{٨}{٢٧} \times ١ = \frac{٨}{٢٧}$$

من الواضح جدا ان مجموع توافيق (م) من ٠ ← ٣ = ٨، بينما المقام يمثل (٢٧) صورة، او سبعة وعشرين طرفا، ومن هنا يتضح بجلاء ان قيمة احتمال الحادثة لا يرتهن بعدد توافيقها، اذ كانت توافيق (٠) = ١ كما كانت توافيق(٣) = ١، لكن $\left(\frac{٠}{٣}\right) = \frac{١}{٢٧}$ ، بينما كان احتمال

$\left(\frac{٣}{٣}\right) = \frac{٨}{٢٧}$ ..

وكذلك الحال بالنسبة لتوافيق (١) و(٢) واحتماليهما، فتوافيق كل منهما = ٣، لكن احتمال $\left(\frac{١}{٣}\right) = \frac{٦}{٢٧}$ ، بينما كان $\left(\frac{٢}{٣}\right) = \frac{١٢}{٢٧}$

وهنا يواجه التفسير الاجمالي اعتراضا مفاده:

«اذا افترضنا ان احتمال الحادثة $\frac{٢}{٣}$ ، فان نظرية برنولي تبرهن على انه في حالة اجراء عدد كبير من الاختبارات نستطيع ان نقول بدرجة قريبة من العلم بان نسبة تكرر الحادثة في مجموع تلك الاختبارات هي $\frac{٢}{٣}$ اي مطابقة لدرجة احتمال الحادثة.

قد يتصور في البداية ان هذا لا يمكن ان يفسر على اساس العلم الاجمالي، لأنا رأينا ان العلم الاجمالي في المثال الاول[١] تشتمل مجموعة اطراف على ستة عشر عضواً، وأن توافيق الصورة التي تفترض وقوع

---

(١) المثال هو اذا رمينا قطعة نقد اعتيادية اربع مرات ويكون ن = ٤ ، هـ = $\frac{١}{٢}$.

الحادثة بنسبة $\frac{١}{٢}$ في مجموع الاختبارات الاربعة اكثر عددا من توافيق اي صورة اخرى، ولهذا فسوف تحتل مراكز اكثر في مجموعة أطراف العلم الاجمالي، واذا ازداد عدد الاختبارات فسوف تزداد أطراف العلم الاجمالي وتظل دائماً توافيق الصورة التي تفترض تكرر الحادثة بنسبة $\frac{١}{٢}$ في مجموع الاختبارات أكثر عدداً من توافيق اي صورة اخرى وهذا يفرض من زاوية العلم الاجمالي أن تكون نسبة تكرار الحادثة الأكبر احتمالاً دائماً ومهما كثرت الاختبارات $\frac{١}{٢}$ سواء كان احتمال الحادثة $\frac{١}{٢}$ او $\frac{٢}{٣}$ لان ازدياد درجة احتمال الحادثة لا يؤثر على اعداد توافيق الصور التي تتكـون منها مجموعة أطراف العلم الاجمالي، وهذا يناقض نظرية برنولي فلابد اذن من استنتاج ان المحدد الاساس لدرجة الاحتمال ليس هو العلم الاجمالي»[٢].

ومن الواضح ان هذا الاعتراض يتوجه على التفسير الاجمالي اذا اعتبرنا ان العلم الاجمالي، الذي نقيّم في ضوءه درجة احتمال الحادثة عبارة عن العلم الاجمالي الذي تتمثل مجموعته في مجموع اعداد توافيق الصور الممكنة لـ (م) في (ن).

ومن هنا حاول كتاب (الاسس المنطقية للاستقراء) الاجابة على هذا الاعتراض مؤكداً ان قيمة الحادثة المنفردة اذا كانت نصفاً فتقييم درجة احتمال الحادثة في اي (م) ترتهن بعدد توافيقها، وسيكون العلم الاجمالي الذي تتمثل مجموعة اطرافه في مجموع اعداد توافيق صور (م) في (ن).

---

(٢) الاسس المنطقية للاستقراء، ص ٢١٦، ٢١٧.

اما اذا كان احتمال الحادثة ونقيضها غير متساويين، كما في المثال الثاني ـ الذي ذكرناه ـ، حيث كانت قطعة النقد مصممة بطريقة خاصة يظهر وجه الصورة فيها بنسبة $\frac{٢}{٣}$ ، فاننا «في حالة رمي قطعة النقد تلك عدداً كبيراً من المرات نواجه علمين اجماليين:

أحدهما ـ العلم الاجمالي الثلاثي الأطراف الذي يحدد لنا ان درجة احتمال الحادثة ـ اي ظهور الصورة = $\frac{٢}{٣}$.

والآخر ـ العلم الاجمالي الذي تضم مجموعة أطرافه عدداً كبيراً من الاعضاء يساوي مجموع اعداد توافيق الصور الممكنة لتكرر الحادثة في تلك المرات.

ولابد في هذه الحالة من ضرب احد العلمين بالآخر اذ يتكون لدينا علم اجمالي ثالث يساوي عدد أطرافه عدد أطراف العلم الاجمالي الثلاثي مضروباً بعدد أطراف العلم الاجمالي الآخر. وفي هذا العلم الاجمالي الثالث تعتبر الاعضاء جميعاً متساوية في درجة الاحتمال وفقاً للتعريف. وتحتل الحادثة دائماً في مجموعة أطراف هذا العلم مراكز نسبتها الى عدد اعضاء تلك المجموعة يطابق دائماً النسبة التي تمثل درجة الاحتمال، وهي حسب ما افترضناه $\frac{٢}{٣}$ وهكذا نعرف ان نسبة تكرر الحادثة الأكبر احتمالاً في مجموعة من الاختبارات تحدد كما يلي:

اولاً ـ على أساس العلم الاجمالي الذي تمثل أطرافه مجموع اعداد توافيق الصور الممكنة لتكرر الحادثة في ذلك العدد من الاختبارات، وهذا فيما اذا لم يوجد هناك علم اجمالي آخر تشتمل مجموعة اطرافه على ثلاثه

أعضاء أو أكثر ويؤدي الى تحديد درجة احتمال الحادثة بكسر أكبر من النصف أو أصغر.

وثانياً ـ اذا وجد علم اجمالي آخر من هذا القبيل تحدد نسبة تكرر الحادثة الاكبر احتمالاً على أساس العلم الاجمالي الثالث الناتج من ضرب أطراف احد العلمين الاولين بأطراف الآخر.

وهكذا تجد نظرية برنولي تفسيرها النهائي في العلم الأجمالي على أساس التعريف الذي عرضناه»[١].

وهنا اود التأكيد على ايضاح الحقائق التالية:

اولا ـ اننا نضرب ـ في معادلة برنولي ـ عدد توافيق الحادثة (م) في (ن) من الاختبارات بقيمة احتمال وقوع الحادثة في حالة واحدة محددة، أي اننا نضرب عدد توافيق (م) في احتمال وقوع (م) في مرة معينة ، وقد نوهنا ـ في شرح معادلة برنولي ـ الى أن هذا الضرب يعني في الواقع جمع احتمالات (م) لأن احتمال وقوع (م) في صورة محددة لا يعبر عن كل المراكز التي تحتلها (م) في مجموعة الاحتمالات التي تمثلها مجموعة (ن) والتي هي عبارة عن مجموعة احتمالات (م) من (م = ٠) الى (م = ن) بل احتمال وقوع (م) يساوي مجموع احتمالات الصور التي تحتلها (م).

ثانياً ـ نوضح الحقيقة المتقدمة من خلال المثال الاول ـ الذي تقدم ـ حيث رمينا قطعة النقد ثلاث مرات وكان هـ = $\frac{1}{2}$ ، وهنا نواجه علماً

(١) الاسس المنطقية للاستقراء، ص ٢١٧ـ٢١٨.

اجمالياً مؤلفاً من ثمانية أطراف هي حاصل ضرب (١/٢ × ١/٢ × ١/٢)،

لاننا في كل رمية سنواجه عاملين ، عامل في صالح ظهور وجه الصورة، وعامل في صالح ظهور الكتابة، ولنرمز للعاملين في الرمية الاولى بـ (أ، ب)، وللعاملين في الرمية الثانية بـ (أَ، بَ)، وللعاملين في الرمية الثالثة بـ (أً، بً)، فاذا أردنا رمي قطعة النقد ثلاث مرات سنواجه علمًا اجمالياً مؤلفاً من الاطراف التالية:

١ـ اما أن يقع أ، أَ، أً .
٢ـ واما أن يقع أ، أَ، بً .
٣ـ واما أن يقع أ، بَ، أً.
٤ـ واما أن يقع أ، بَ، بً.
٥ـ واما أن يقع ب، أَ، أً.
٦ـ واما أن يقع ب، أَ، بً.
٧ـ واما أن يقع ب، بَ، أً.
٨ـ واما أن يقع ب، بَ، بً.

واذا افترضنا أن (أ)، (أَ)، (أً) هي عوامل ظهور وجه الصورة، وان (ب)، (بَ)، (بً) هي عوامل ظهور الكتابة فسوف نلاحظ:

ان هناك طرفاً واحداً فقط لصالح ظهور وجه الصورة في المرات الثلاث، وأن طرفاً واحداً لصالح عدم ظهورها في كل المرات، وهما الطرف الاول والطرف الاخير، كما ان هنـاك ثلاثة أطراف لصالح ظهور وجه الصورة مرة واحدة، وهي الأطراف الرابع والسادس والسابع، وهناك ثلاثة

أطراف لصالح ظهورها مرتين، وهي الاطراف الثاني والثالث والخامس.

ونتـائج هذا العلم الاجمالي منسجمة مع قيم الاحتمالات التي تم تحديدها في المثال على اساس معادلة برنولي حيث كان لدينا:

$$ح_{ن}(م)\binom{٠}{٣} = \frac{١}{٨}$$

$$ح_{ن}(م)\binom{١}{٣} = \frac{٣}{٨}$$

$$ح_{ن}(م)\binom{٢}{٣} = \frac{٣}{٨}$$

$$ح_{ن}(م)\binom{٣}{٣} = \frac{١}{٨}$$

يبقى تفسير اصل معادلة برنولي على أساس هذا العلم الاجمالي، فنحن لأجل ايجاد قيمة احتمال صورة محددة بالذات كان علينا ان نضرب $(هـ)^{م} \times (١ - هـ)^{ن-م}$،وقد كانت في المثال ($\frac{١}{٨}$)، وهذا الاحتمـال في ضوء العلم الاجمـالي يعني ان لدينا ثمانية أطراف، وطرف واحد فقط من هذه الاطراف الثمانية هو في صالح الحادثة.

ولنفرض ان الحادثة هي ظهور وجه الصورة في المرة الاولى وظهور الكتابـة في الثانية والثالثة، فسوف نجد أن طرفاً واحداً من أطراف العلم الاجمالي المتقدمة هو في صالح ظهور وجه الصورة في المرة الاولى، وهو عبارة عن الطرف الرابع.

واذا أردنا قياس درجة احتمال ظهور وجه الصورة مرة واحدة، أي قياس $\binom{١}{٣}$ ، فتقول معادلة برنولي علينا ان نضرب عدد توافيق (م في ن) في قيمة احتمال خروج وجه الصورة في رمية محددة:

$$\frac{ن!}{م!(ن-م)!} \times (هـ)^{م} \times (١ - هـ)^{ن-م}$$

وحيث ان م = ١، ن = ٣، كانت توافيق (م في ن) = ٣.

وحينما نضرب ٣ × $\frac{١}{٨}$ = $\frac{٣}{٨}$ = ح ن (م)$\binom{١}{٣}$. وهذا الضرب يعني في الحقيقة أن نجمع ($\frac{١}{٨}$ + $\frac{١}{٨}$ + $\frac{١}{٨}$)، أي أن نجمع القيم الاحتمالية لكل صور (م)، اي وقوع الحادثة مرة واحدة، ولما كانت قيمة احتمال وقوعها في كل مرة محددة مساوياً لـ ($\frac{١}{٨}$)، كان علينا أن نجمع $\frac{١}{٨}$ بعدد الصور الممكنة لوقوعها مرة واحدة، ولسهولة العملية الحسابية نضرب عدد صور وقوعها مرة واحدة في قيمة احتمال وقوعها في مرة واحدة محددة.

في هذا الضوء يتضح لنا ان الاحتمال الذي تفرزه معادلات برنولي، والـذي يتعين على نظرية الاحتمال الاجمالي تفسيره، هو الاحتمال الذي تفرزه اولاً معادلة تحديد قيمة احتمال وقوع الحادثة في مرة محددة، حيث ان مقام كسر هذا الاحتمال هو الذي يبقى أساساً لتقييم كل احتمالات (م)، وهو الذي يمثل في الواقع مجموعة أطراف العلم الاجمالي، فعلى أساس هذا الكسر الذي ينشأ في الواقع على أساس قاعدة الضرب في الاحتمالات المستقلة يجب تشكيل مجموعة أطراف العلم الاجمالي.

ثالثاً ـ نوضح الحقيقة المتقدمة من خلال المثال الثاني، حيث رمينا قطعة النقد ثلاث مرات، وكان هـ = $\frac{٢}{٣}$.

في هذه الحالة سنواجه علماً اجمالياً مؤلفاً من (٢٧) طرفاً، لاننا في كل رمية من الرميات الثلاثة نواجه علماً اجمالياً مؤلفاً من ثلاثة أطراف، وطرفان منه لصالح ظهور وجه الصورة، وطرف واحد فقط لصالح ظهور الكتابة، فاذا

أردنا أن نقيس احتمال ظهور وجه الصورة في صورة محددة بالذات علينا ان نضرب قيمة احتمال ظهورها في هذه الصورة بالذات $= (هـ)^{م} \times (1 - هـ)^{ن - م}$، وهو احتمال نقيض الحادثة، وحينئذ سيتكون لدينا علم اجمالي مؤلف من (٢٧) طرفا، وهذه الاطراف متساويـة في قيمها الاحتمالية، ومن هنا صح تقييم درجة الاحتمال على أساس هذا العلم الاجمالي وفقاً للتعريف الذي طرحه الاستاذ.

ونستطيع ايضاح مجموعة أطراف العلم الاجمالي ضمن الجدول التالي:

* نواجه عند الرمية الاولى علمًا اجماليًا مؤلفاً من ثلاثة أطراف، نرمز اليها بـ (ا، ب، جـ)، ونفرض ان (ا، ب) هي عوامل ظهور وجه الصورة، و (جـ) عامل ظهور الكتابة.

** نواجه عند الرمية الثانية ثلاثة أطراف (أَ، بَ، جَـ)، و(أَ، بَ) عوامل ظهور الصورة و(جَـ) عامل ظهور الكتابة.

*** نواجه عند الرمية الثالثة ثلاثة أطراف (أً، بً، جًـ)، و(أً، بً) عوامل ظهور الصورة، و(جًـ) عامل ظهور الكتابة.

بعد ضرب هذه العلوم الاجمالية ببعضها نواجه علمًا اجماليًا مؤلفاً من الأطراف التالية :

١ـ اما أن يحدث ا آ اً.

٢ـ واما أن يحدث ا ب اً.

٣ـ واما أن يحدث ا جَـ اً.

٤ـ واما أن يحدث ا آ اً.

٥ـ واما أن يحدث ا بَ بً.

٦ـ واما أن يحدث ا جَـ بً.

٧ـ واما أن يحدث ا آ جً

٨ـ واما أن يحدث ا بَ جً.

٩ـ واما أن يحدث ا جَـ جً.

١٠ـ واما أن يحدث ب آ أً.

١١ـ واما أن يحدث ب بَ أً.

١٢ـ واما أن يحدث ب جَـ أً.

١٣ـ واما أن يحدث ب آ بً.

١٤ـ واما أن يحدث ب بَ بً.

١٥ـ واما أن يحدث ب جَـ بً.

١٦ـ واما أن يحدث ب آ جً.

١٧ـ واما أن يحدث ب بَ جً.

١٨ـ واما أن يحدث ب جَـ جً.

١٩ـ واما أن يحدث جـ آ أً.

٢٠ـ واما أن يحدث جـ بَ أً.

٢١ـ واما أن يحدث جـ جَـ أً.

٢٢ـ واما أن يحدث جـ آ بً.

٢٣ـ واما أن يحدث جـ بَ بً.

٢٤ـ واما أن يحدث جـ جَـ بً.

٢٥ـ واما أن يحدث جـ آ جً.

٢٦ـ واما أن يحدث جـ بَ جً.

٢٧ـ واما أن يحدث جـ جَـ جً.

نلاحظ هنا أننا أمام (٢٧) طرفاً يمكن افتراض تساوي قيمها الاحتمالية سلفاً، فمجموعة أطراف هذا العلم الاجمالي تتطابق في هذا الشرط مع العلم الاجمالي الذي لابد أن يكون أساساً لتقييم درجة احتمال الحوادث وفقاً لتعريف السيد الاستاذ.

واذا اردنا تقييم احتمال ظهور وجه الصورة في مرة واحدة محددة بالذات، فعلينا ان نضرب $(\text{هـ})^{\text{ر}} \times (١ - \text{هـ})^{\text{ن}-\text{ر}}$، وحيث ان $\text{هـ} = \frac{٢}{٣}$ ، ن = ٣، يصبح لدينا ما يلي:

$$\left(\frac{٢}{٣}\right) \times \left(١ - \frac{٢}{٣}\right)^{٣-١} = \frac{٢}{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} = \frac{٢}{٢٧}$$

وحينما نلاحظ هذه القيمة الاحتمالية لوقوع الحادثة في ضوء العلم الاجمالي المتقدم، نجد ان هناك طرفين فقط لصالح ظهور وجه الصورة في مرة واحدة محددة بالذات.

فأي مرة من المرات الثلاث نفترض انها هي المقصودة بالتحديد، نجد ان طرفين لصالح ظهور وجه الصورة في هذه المرة بالذات، ولنفترض اننا نريد تحديد درجة احتمال ظهور وجه الصورة في المرة الاولى، نجد ان الطرف التاسع (ا جَـ جًـ) والطرف الثامن عشر (ب جَـ جًـ) فقط في صالح الصورة في المرة الاولى وظهور وجه الكتابة في المرة الثانية والثالثة.

اما اذا أردنا قياس درجة احتمال ظهور وجه الصورة في مرة واحدة، أي أن نحدد $\text{ح}_{\text{ن}}(\text{م}) \langle \frac{١}{٣} \rangle$ ، فهذا يعني أننا نريد قياس احتمال ظهور وجه الصورة في مرة واحدة على الأقل، وحيث ان هناك صوراً متعددة لظهور وجه الصورة مرة واحدة ـ فقد تظهر في المرة الاولى فقط، أو في المرة الثانية فقط، أو في المرة الثالثة فقط ـ فهذا يعني أن نجمع قيم احتمالات ظهور

وجـه الصورة في كل صورة من الصور الممكنة لظهور وجه الصورة مرة واحدة في (ن) من الرميات، فاذا كانت الصور الممكنة لظهور وجه الصورة مرة واحدة ثلاثة، كما هو في (م = ١) و (ن = ٣).

فهذا يعني أن نجمع قيم احتمال ظهور وجه الصورة في مرة واحدة محددة ثلاث مرات، واذا كانت ن = ١٠٠ و(م = ١)، فهذا يعني أن نجمع قيم احتمالات صورة محددة مئة مرة.... وهكذا، وتسهيلاً للعملية الحسابية يمكن ان نضـرب عدد الصـور الممكنة لـ (م في ن) في قيمة احتمال ظهور وجه الصورة في صورة محددة بالذات، ففي مثالنا كانت عدد الصور الممكنة لـ (م في ن) = ٣، وقيمة احتمال ظهور وجه الصورة مرة واحدة معينة = $\frac{٢}{٢٧}$ ،

فبدلاً من جمع $\frac{٢}{٢٧}$ + $\frac{٢}{٢٧}$ + $\frac{٢}{٢٧}$ ، نقول من البدء ٣ × $\frac{٢}{٢٧}$.

وحيث ان عدد الصـور الممكنة لـ (م في ن) تستخرج وفق قاعدة التوافيق، وان عدد الصور الممكنة لـ (م في ن) = $\frac{ن!}{م!\ (ن - م)!}$ ،

واحتمال ظهور وجه الصورة في مرة محددة بالذات = $(هـ)^{م} \times (١ - هـ)^{ن-م}$.

جاءت معادلة برنولي على الشكل التالي:

$$\frac{ن!}{م!\ (ن - م)!} \times (هـ)^{م} \times (١ - هـ)^{ن-م}.$$

واذا أردنا استخراج $ح_{ن}$ (م)($\frac{١}{٣}$)وكانت ن = ٣ كما في مثالنا يكون لدينا:

$$\frac{٣!}{١!\ (٣ - ١)!} \times (\frac{٢}{٣}) \times (١ - \frac{٢}{٣})^{٣-١}.$$

$$= \frac{٣!}{٢!} \times \frac{٢}{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}.$$

$$= ٣ \times \frac{٢}{٢٧} = \frac{٦}{٢٧}$$

نأتي الآن الى تفسير ($ح_ن (م) (\frac{١}{٣}) = \frac{٦}{٢٧}$) وفقاً للعلم الاجمالي، فالعلم الاجمالي الذي كان لدينا يتألف من (٢٧) طرفاً. والأطراف التي هي في صالح ($ح_ن (م)$)، أي احتمال ظهور وجه الصورة في مرة واحدة على الأقل عبارة عن: الطرف التاسع (آ جَـ جًـ)، والطرف الثامن عشر (ب جَـ جًـ)، والطرف الحادي والعشرون (جـ جَـ آً)، والطرف الرابع والعشرون (جـ جَـ بً)، والطرف الخامس العشرون (جـ آ جًـ)، والطرف السادس والعشرون (جـ بَ جًـ).

وبما ان التعريف الاجمالي يحدد درجة احتمال الحادثة بـ :

$$\frac{\text{عدد المراكز التي تحتلها الحادثة}}{\text{مجموعة اطراف العلم الاجمالي}}$$

وحيث ان $ح_ن (م) (\frac{١}{٣})$ تحتل ستة مراكز من مجموعة مراكز اطراف العلم الاجمالي.

اذن $ح_ن (م) (\frac{١}{٣}) = \frac{٦}{٢٧}$ ، وهذا التقييم مطابق للنتيجة الرياضية التي تُستنبط في ضوء معادلة برنولي.

رابعاً ـ اتضح لنا في ضوء النقاط المتقدمة أن العلم الاجمالي، الذي

لابد ان نفسر في ضوءه الاحتمالات في نظرية توزيع برنولي، هو العلم الاجمالي الذي نفسر على اساسه قيمة احتمال وقوع صورة محددة بالذات، ومجموعة اطراف هذا العلم ـ التي هي مقام الكسر في احتمال وقوع الحادثة في صورة محددة بالذات ـ هي مجموعة العلم الاجمالي التي نفسر على أساسها قيمة احتمال المرات الأكبر احتمالاً في معادلات برنولي.

وعدد أطراف هذه المجموعة قد يتطابق مع مجموع اعداد توافيق (م) في (ن)، كما هو الحال اذا كانت هـ = $1/2$ ، وقد لا تتطابق كما هو الحال في باقي فروض (هـ).

ومن هنا لا أجد مبرراً لكي يعتمد التفسير الاجمالي ـ حتى في الحالة الاولى ـ على العلم الاجمالي الذي تتمثل مجموعة اطرافه في مجموعة اعداد توافيق («م» في «ن») أساساً لتقويم درجة احتمال الحوادث في نظرية التوزيع، ونقول كما جاء في الأسس ان احتمال الحادثة المنفردة اذا لم يكن مساوياً لـ $1/2$ وكانت تساوي $\frac{2}{3}$ ، فالعلم الاجمالي الذي نفسر في ضوءه احتمال الحوادث في نظرية التوزيع ـ بما في ذلك المرات الاكبر احتمالا ـ هو حاصل ضرب مجموعة اطراف العلم الثلاثي في مجموعة أطراف العلم الاجمالي، التي تتمثل في مجموع اعداد توافيق الصور الممكنة لـ (م) في (ن)، فهذا يعني اننا اذا رمينا قطعة النقد ثلاث مرات، وكان احتمال ظهور وجه الصورة مساوياً لـ ($\frac{2}{3}$)، فالعلم الاجمالي الذي نفسر على أساسه $ح_{ن}$ (م)=(١)أو غيرها من الاحتمالات هو عبارة عن مجموع توافيق (م) من ٠ ← ٣، وهي تساوي (٨) صور مضروباً في (٣) التي هي مجموع أطراف العلم الثلاثي، وسوف يكون العلم الاجمالي مؤلفاً من (٢٤) طرفاً، وهذا

يناقض تماماً النتيجة التي تفضي اليها معادلة برنولي، حيث ان المقام في ضوء معادلات برنولي = ٢٧.

ولكن على أي حال تجد معادلة برنولي تفسيرها المنسجم في ضوء العلم الاجمالي الذي تحدثنا عنه، ويستوعب التفسير الاجمالي للاحتمال معادلة برنولي.

* * *

٣ـ التفسير الاجمالي .. مشكلات وحلول:

عرضنا في الفصل السابق ثلاث مشكلات من المشاكل التي تواجه التفسير الاجمالي، كما طرحنا ـ خلال الفصل الاول، وفي ما تقدم من فقرات هذا الفصل ـ أفكارا نقترب عبرها من فهم التفسير الاجمالي للاحتمال. وحيث اننا نحاول ان ننتهي من هذا الفصل وقد وضعنا نظرية الاحتمال على أساس التفسير الاجمالي في صيغتها النهائية، علينا ان نستقصي المشكلات الرئيسية، التي تقف أمام هذا التفسير، بل ان نستقصي المشكلات الاساسية التي تقف أمـام نظرية الاحتمال في اطار هذا التفسير، موضحين اسلوب معالجتها، بغية ان نثبت المبادئ والقواعد التي ينطلق هذا التفسير في ضوءها.

وقبل ان نتناول المشكلات والحلول التي تقترحها نظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي علينا أولاً ان نعقد فقرة مستقلة لتحديد الصيغة الفنية النهائية للتعريف الاجمالي للاحتمال.

أـ التعريف الاجمالي:

اذا كان لدينا علم اجمالي فهذا يعني أن لدينا علما بمفهوم كلي عام، وشكا في انطباق هذا المفهوم العام على مجموعة من المصاديق، أي لدينا علم بوقوع حادثة وشك وتردد في ما يمثلها من مجموعة هذه المصاديق.

وحينما نلاحظ العلاقة بين كل مصداق من مصاديق المجموعة والعلم الاجمالي فسوف نرى ان هذه العلاقة تتضمن مفهوم (الاحتمال)، أي ان كل طرف ومصداق من أطراف ومصاديق المجموعة تحتمل أن يمثل المعلوم بالاجمال.

اذن! الاحتمال الرياضي (أي الاحتمال الذي يمكن تحديد قيمته رياضياً) متضمن دائمًا في العلاقة بين كل طرف من اطراف العلم الاجمالي وبين العلم الاجمالي ذاته، وقيمته تتمثل دائمًا في كسر، نرمز اليه $\frac{ح}{م}$ وبالامكان أن نفسر البسط والمقام في هذا الكسر بتفسيرين:

التفسير الاول ـ ان الكسر هو ناتج قسمة رقم اليقين على عدد أعضاء مجموعة أطراف العلم الاجمالي، وحينئذ يكون الاحتمال درجة من درجات الاعتقاد والتصديق، وحيث ان المقام في الكسر هو مجموعة أطراف العلم الاجمالي، والعلم لا يكون اجمالياً اذا كان له طرف واحد، بل الحد الادنى لمجموعة أطراف العلم الاجمالي اثنان، اذن! سيكون الاحتمال درجة من درجات التصديق الناقص. والاحتمال بهذا المعنى ليس علاقة موضوعية بين حادثتين، ولا يمثل نسبة تكرار الحادثة.

التفسير الثاني ـ ان الكسر هو ناتج قسمة عدد المراكز التي تحتلها الحادثة، على عدد أعضاء مجموعة أطراف العلم الاجمالي، فكل عضو من اعضاء العلم الاجمالي يحتل مركزاً من بين مجموعة المراكز التي تمثلها مجموعة أعضاء العلم الاجمالي. فاذا أردنا قياس درجة احتمال حادثة ما فسوف يتمثل هذا الاحتمال بنسبة موضوعية بين عدد المراكز التي تلازم الحادثة من مجموعة مراكز اطراف العلم الاجمالي الى مجموعة اطراف العلم الاجمالي.

ب ـ أطراف العلم الاجمالي حوادث متنافية:

من الممكن أن يحصل لدينا علم اجمالي باطراف غير متنافية، كما لو علمنا بان (احمد أو علي) سيزورنا هذه الليلة، دون افتراض أي مانعة جمع بينهما، ومن الممكن أيضاً ان يحصل لدينا علم اجمالي باطراف متنافية، كما لو

علمنا باننا حينما نستخرج احدى الكرات فسوف تكون هذه الكرة احدى الكرات الخمسة (اذا افترضنا اننا نستخرج الكرة من حقيبة تحتوي على خمس كرات). وخروج كل واحدة من الكرات الخمسة حادثة منفردة لا تجتمع مع خروج احدى أو بعض الكرات الخمسة.

والعلم الاجمالي الذي يتحدث عنه التعريف الاجمالي هو العلم الاجمالي المتنافي الاطراف، كما ان مجموعة أطراف العلم الاجمالي تساوي قيمها الاحتمالية دائماً رقم اليقين (١).

أما ما هو البرهان على انّ مجموعة أطراف العلم الاجمالي تتنافى أطرافها، ويساوي مجموع قيمها الاحتمالية (١)؟ فهذا ما سنأتي على اثباته هنا، أي سوف نثبت ان مجموعة أطراف العلم الاجمالي = مجموعة متكاملة.

ننطلق من التفسير الاجمالي، حيث يقول:

ان المقام في الكسر الذي يمثل قيمة الاحتمال هو دائماً عبارة عن (مجموعة أطراف العلم الاجمالي) اذ تقول الصيغة الاولى لتفسير الاحتمال الرياضي ان قيمته تساوي:

$$\frac{\text{رقم اليقين}}{\text{مجموعة اطراف العلم الاجمالي}}$$

، كما ان الصيغة الثانية لتفسير الاحتمال الرياضي تقول ان قيمته تساوي:

$$\frac{\text{عدد المراكز التي تحتلها الحادثة}}{\text{مجموعة اطراف العلم الاجمالي}}$$

، وهذا يعني ان المقام يجب أن يكون مجموعة أطراف العلم الاجمالي، وهذا مقياس أساس يعتمده تقييم درجة الاحتمال في ضوء التفسير الاجمالي.

ونحن حينما نحدد مجموعة أطراف العلم الاجمالي، فهذا يعني أننا كما حصرنا اليقين في دائرة الكلي حصرنا أيضاً الشك في دائرة هذه الأطراف، ودون حصر وتحديد عدد أطراف العلم الاجمالي بحيث يصح أنها مجموعة الاطـراف وليست بعض الاطراف لا يمكن تحديد درجة احتمال الحادثة بشكل سليم.

وبغية تحديد عناصر المجموعة بشكل كامل والحصول على مجموعة أطراف العلم الاجمالي كاملة، لابد من فرض التنافي بين أطراف العلم الاجمالي، اذ مع فرض عدم التنافي، فهذا يعني ان الأطراف ليست مجموعة أطراف العلم الاجمالي، بل هي بعض الاطراف، وعندئذ لا يمكن تحديد درجة احتمال الحادثة بشكل سليم.

ايضاح ذلك:

لو علمنا بأن احد أصدقائنا الثلاثة (آ، ب، جـ) سوف يزورنا اليوم، فلدينا هنا علم اجمالي بحصول أحدى الحالات التالية:

١ـ أن يزورنا (آ).

٢ـ أن يزورنا (ب).

٣ـ أن يزورنا (جـ).

وقد افترضنا أن الحالات غير متنافية.

واذا أردنـا أن نحـدد قيمة احتمال أن يزورنا كل واحد منهم على أساس هذا العلم الاجمالي فسوف يكون ($\frac{١}{٣}$) والمقام هنا (٣) لأن عدد أطراف العلم الاجمالي هي ثلاثة.

لكننا اذا تفحصنا المقام جيداً، سوف نجد أن عدد الأطراف ليست

ثلاثة، لأننا حينما نعلم بزيارة أحد الثلاثة لنا، دون أي تناف في اجتماعهم، فهذا يعني أن دائرة الشك ليست محصورة في ثلاثة أطراف:

اما أن يزورنا (آ) وأما أن يزورنا (ب) وأما أن يزورنا (جـ).

بل تتسـع هذه الدائرة الى أطراف أخرى، أذ سوف نتردد في أن يزورنا (آ) أو (ب) أو (جـ) أو (ب) و(جـ) أو (ب) و(آ)، أو (جـ) و(آ) أو (آ) و(ب) و (جـ).

وهـذه الأطراف السبعة الاخيرة هي مجموعة الإطراف، لأنها كل الاطراف التي تمتد اليها دائرة الشك، واذا أردنا حساب قيمة احتمال أن يزورنا (آ) فسوف تكون $\frac{٤}{٧}$ ، لان مجموعة أطراف العلم الاجمالي سبعة أطراف.

وحينما نلاحظ الفرق بين مجموعة (آ، ب، جـ) ومجموعة (آ، ب، جـ، آ ب، آ جـ، ب جـ، آ ب جـ) نجـد أن المجموعـة الاولى غير متنافية الاطراف، بينما تمثل المجموعة الثانية مجموعة متنافية الاطراف، وهذه هي الصفة الاولى التي يصح اطلاقها على مجموعة أطراف العلم الاجمالي، وهي أنها (مجموعة متنافية الاطراف).

ومع وجود العلم الاجمالي بحصول (آ او ب......... او آ ب جـ) فهذا يعني أن حصـول أحـدى هذه الحـالات سوف يكون متيقنا. اذن العلم الاجمالي + مجموعة الأطراف = لابد من وقوع أحد الاطراف، وهذه هي الصفه الثانية التي يصح أطلاقها على مجموعة اطراف العلم الاجمالي، وهي أنها (مجموعة لابد أن يقع احد اطرافها).

واذا تذكرنا تعريف المجموعة المتكاملة، حيث عرفناها بأنها مجموعة

الحوادث المتنافية، والتي لابد أن تقع احداها، يتضح لنا أن مجموعة أطراف العلم الاجمالي مجموعة متكاملة.

اذن! مجموعة أطراف العلم الاجمالي = ١.

اتضح لنا أن مجموعة أطراف العلم الاجمالي تشكل مجموعة متكاملة، فالعلم الاجمالي الذي يقوم على أساسه التفسير الاجمالي للاحتمال هو علم اجمالي متنافي الأطراف، وهذا يعني أن المجموعة غير متنافية الأطراف لا تخضع للتفسير الاجمالي، ولكن باعتبار أن كل مجموعة غير متنافية الأطراف يمكن أن نشكل منها مجموعة متكاملة، يضحي شمول التعريف الاجمالي لكل الاحتمالات التي يمكن قياس درجتها رياضياً امراً بيناً.

جـ ـ حاجة التعريف الى بديهية اضافية:

أشرنا الى أن تحديد قيمة الاحتمال تتم بطريقتين تبعا لتفسيرنا للاحتمال الرياضي، والاحتمال الرياضي على أساس التفسير الاول يساوي قسمة رقم اليقين على مجموعة أطراف العلم الاجمالي. وفي ضوء هذا التفسير لابد من افتراض تساوي القيم الاحتمالية لمجموعة أعضاء العلم الاجمالي، واتخاذ هذا الافتراض بوصفه (البديهية الاضافية الاولى)، التي يجب أن تضاف الى قائمة البديهيات التي يستدعيها حساب قيمة الاحتمال.

د ـ التفسير الاجمالي وتعريف مجموعة الأعضاء:

تقدم في الفقرة (ب) ان مجموعة أطراف العلم الاجمالي تمثل مجموعة متكاملة وبما ان المجموعة المتكاملة تتألف من الحادثة ونقيضها، كما تتألف

من الحـوادث المتضادة، فهذا يعني امكانية تشكيل مجموعة أطراف العلم الاجمالي ضمن صور متعددة.

توضيح ذلك:

اذا علمنا اجمالاً بزيارة (آ) فقط او (ب) فقط او (جـ) فقط، فهنا لدينا علم اجمالي، ومجموعة أطرافه تتألف من ثلاثة أعضاء، ويمكن أن نقول أن لدينا علمًا اجمالياً بزيارة (آ) أو عدم زيارته. ويكون لدينا علم اجمالي، أطـرافه اثنان،وحينئذ سيصطدم التعريف الاجمالي مع البديهية الاولى من بديهيات حساب الاحتمال.

ومعـالجة هذه المشكلة تتوقف على تعريفنا لمجموعة أطراف العلم الاجمـالي، وحينـما نضم حقيقتـين ـ تقدمت الاشارة اليهما ـ الى بعضهما سنحصل على هذا التعريف، والحقيقتان هما:

١ـ أن مفهوم المجموعة يعني كل اطراف العلم الاجمالي، وليس بعضها.

٢ـ المقياس الذي استخدمناه في معالجة التقسيم وهو عبارة عن:

(اذا أمكن تقسيم احـد أطـراف العلم الاجمالي، دون أن يناظره تقسيم للأطراف الأخرى فهذه الاقسام أما ان تكون أصلية واما ان تكون فرعية، فاذا كانت أصلية كان كل قسم من أقسام الطرف عضواً في مجموعة اطراف العلم الاجمالي، وأما اذا كانت الاقسام فرعية، فالطرف عضو واحد).

اذا ضممنا هاتين الحقيقتين الى بعضهما نحصل حينئذ على التعريف

التالي لمجموعة أطراف العلم الاجمالي:

(هي المجموعة التي تضم كل أطراف العلم الاجمالي المتصفة:

أولاً ـ بانها ليست أقساماً فرعية.

ثانياً ـ أن لا يكون قد أهمل في بعض تلك الاطراف التقسيم الى قسمين اصليين أو أقسام أصلية الا اذا كان هناك اهمال مناظر له في سائر الاطراف).

ويعدّ الاستاذ الشهيد هذا التعريف بديهية اضافية ثانية، وان أشار الى أنه في الحقيقة تعريف لموضوع البديهية الاضافية الأولى.

هـ ـ قاعدة الضرب في العلوم الاجمالية:

تقدم ان هناك قاعدة للضرب بين الاحتمالات، وهي قاعدة رياضية مستنتجة على أساس بديهية الاتصال، وحينما نقرأ هذه القاعدة في ضوء التفسير الاجمالي للاحتمال نجدها معادلة تماماً للضرب بين العلوم الاجمالية، ومن خلال الضرب بين العلم الاجمالي الأول والعلم الاجمالي الثاني نحصل على علم اجمالي ثالث نُقيّم في ضوءه القيم الاحتمالية الحقيقية لأطراف العلم الاجمالي الاول ولاطراف العلم الاجمالي الثاني. كما نحدد على أساسه قيمة أحتمال الحادثة المطلوبة.

وأطراف العلوم الاجمالية المضروبة بعضها ببعض على نحوين:

النحو الاول ـ ان أطراف كل علم لا تأبى عن التعايش مع أطراف العلم الآخر، وقد مرت أمثلة كثيرة لهذا النحو. كالمثال الثالث والرابع والتاسع، وبما أنها لا تتنافى نلاحظ أنها تحافظ على قيمها الاحتمالية بعد الضرب في العلم الاجمالي الثالث، ولنضرب على ذلك مثلاً:

اذا كان احتمال أن يزورنا (علي) هذه الليلة يساوي $\frac{٣}{٤}$ ، واحتمال ان يزورنا (قصي) هذه الليلة يساوي $\frac{٣}{٤}$ ، أيضاً، أوجد قيمة احتمال أن يزورنا (قصي) و (علي) معاً هذه الليلة؟

من الواضح أننا لأجل ايجاد قيمة احتمال (ق = زيارة قصي) و(ع = زيارة علي) لابد أن نضرب: ح ق × ح ع = $\frac{٣}{٤}$ × $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٩}{١٦}$.

نأتي لنفسر الاحتمالات الواردة في هذا المثال جميعاً.

ح ق ∩ ح ع = ح ق × ح ع.

ومن الواضح ان لدينا هنا ثلاثة احتمالات:

ح ق ∩ ح ع = $\frac{٩}{١٦}$.

ح ق = $\frac{٣}{٤}$.

ح ع = $\frac{٣}{٤}$.

نأخذ بتفسير هذه الاحتمالات، حسب ترتيبها العكسي:

تفسير (ح ع):

حينما يكون لدينا (ح ع) فهذا يعني أن لدينا علماً اجمالياً بوقوع احد أربعة عوامل، وثلاثة من هذه العوامل هي في صالح أن يزورنا (ع) هذه الليلة، ولنرمز الى هذه العوامل بـ (آ ـ ب ـ جـ ـ د) ونفترض ان (د) هو عامل النفي.

وحينما يكون لدينا (ح ق) فهذا يعني ان لدينا علماً اجمالياً بوقوع أحد أربعة عوامل، وثلاثة من هذه العوامل في صالح أن يزورنا (ق) هذه الليلة، ولنرمز الى هذه العوامل بـ (اَ، بَ، جَـ، دَ) ونفترض ان (دَ) هو عامل النفي.

تفسير (ح ق) ∩ (ح ع):

حينما يكون لدينا احتمال زيارة (ق) و(ع) معاً، اي يكون لدينا (ح ق) ∩ (ح ع) فهذا يعني أن لدينا علماً اجمالياً بوقوع احدى الحالات التالية:

١ـ أن يقع ا مع اَ.

٢ـ أن يقع ا مع بَ.

٣ـ أن يقع ا مع جَـ.

٤ـ أن يقع ا مع دَ.

٥ـ أن يقع ب مع اَ.

٦ـ أن يقع ب مع بَ.

٧ـ أن يقع ب مع جَ.

٨ـ أن يقع ب مع دَ.

٩ـ أن يقع جـ مع اَ .

١٠ـ أن يقع جـ مع بَ.

١١ـ أن يقع جـ مع جَـ.

١٢ـ أن يقع جـ مع دَ.

١٣ـ أن يقع د مع اَ.

١٤ـ أن يقع د مع بَ.

١٥ـ أن يقع د مع جَـ.

١٦ـ أن يقع د مع دَ.

وحينما نلاحظ هذه الحالات نجد أنها حالات متنافية ولابد أن تقع واحدة منها،ونلاحظ أيضاً أنّ الحالات (١، ٢، ٣، ٥، ٦، ٧، ٩، ١٠، ١١) هي في صالح أن يزورنا (ع) و(ق) معاً،أيأن زيارة (ع) ⋂ (ق) تحتل تسعة مراكز، وحينما نلاحظ قيمة الاحتمال الناتج بالضرب نجده مساوياً لـ $\frac{٣}{٤}$ × $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٩}{١٦}$.

اذن! (ح ق ⋂ ح ع) = $\frac{٩}{١٦}$

$$\frac{\text{عدد المراكز التي يحتلها (ق ⋂ ع)}}{\text{مجموعة اطراف العلم الاجمالي}}$$

وحينما نلاحظ مجموعة الأطراف،التييتمثلفيها(ح ق ⋂ ح ع) نجدها حاصل ضرب مجموعة الاطراف، التييتمثلفيها (ح ق) في مجموعة الاطراف التي يتمثل فيها (ح ع).

وحينما نلاحظ أطراف العلم الاجمالي الأول ، الذي تضمن (ح ع)، وأطراف العلم الاجمالي الثاني، الذي تضمن (ح ق) نجدها متعايشة مع بعضها بسلام، دون أن ينفي بعضها بعضا؛ ولذا نجدها بعد الضرب في العلم الاجمالي الثالث محتفظة بقيمها الاحتمالية الكاملة فالطرف (آ) كان احتماله ($\frac{١}{٤}$) في العلم الاجمالي الاول، واحتماله في العلم الاجمالي الثالث ($\frac{٤}{١٦}$) وهي نفس القيمة الاحتمالية الاولى، وهكذا سائر الاطراف.

النحـو الثاني ـ ان تتنافى بعض اطراف العلم الاجمالي الاول مع

بعض أطراف العلم الاجمالي الثاني، اي اننا اذا ضممنا أطراف العلم الاجمالي الاول مع العلم الثاني لنكوّن العلم الاجمالي الكبير نجد أن بعضاً من أطراف العلم الاول لا تتعايش مع بعض أطراف العلم الثاني، ولنأخذ المثال الثامن، الذي تقدم في الفصل السابق.

كان لدينا علم اجمالي مؤلف من عشرة اطراف، وطرف واحد منه لصالح عدم اصابة الرامي الهدف (السيارة اليسارية)، وتسعة اطراف من عشرة اطراف كان لصالح اصابة الرامي السيارة اليسارية.

كما كان لدينا علم اجمالي اخر مؤلف من عشرة اطراف ايضا، وطرف واحد منه لصالح ركوب القائد السيارة اليمينية، وتسعة من عشرة اطراف كانت لصالح ركوب القائد في السيارة اليسارية.

واذا اردنا ان نقيّم احتمال قتل القائد في ضوء هذين العلمين لابد لنا من الضرب، وتكوين علم اجمالي كبير، مؤلف من (١٠٠)طرف، وسوف نجد ان (٨٢) طرفا من (١٠٠) طرف هي في صالح قتل القائد، واذا لاحظنا اطراف العلم الاجمالي الكبير (الثالث) نجد ان كل طرف من اطراف هذا العلم يمثل في الحقيقة تلاقيا بين أحد اطراف العلم الاول وأحد اطراف العلم الثاني.

وحينما نلاحظ قائمة الاطراف التي يمثلها اللقاء بين أطراف العلم الاول والعلم الثاني نجدها مائة طرف، تتعايش مع بعضها، وكل طرف منها محتمل الوقوع، واذا لاحظنا القيم الاحتمالية لكل طرف من اطراف العلمين (الاول والثاني) بعد الضرب وتكوين العلم الاجمالي الكبير نجد انها كما كانت، أي ان القيم الاحتمالية لكل طرف من اطراف العلم الأول والثاني

تساوي $\frac{١٠}{١٠٠}$ ، فكل طرف من أطراف العلمين صار متمثلاً في عشرة اطراف ضمن مائة طرف، وهذا يعني ثبات قيمته الاحتمالية: اذ ($\frac{١}{١٠} = \frac{١٠}{١٠٠}$).

والعلمان الاجماليان حتى هذه المرحلة يمثلان تطبيقاً من تطبيقات النحو الأول، أي: ان أطرافهما لا تتنافى، ويحتفظ كل طرف من أطراف العلمين بنفس القيمة الاحتمالية في العلم الثالث، ولكن اذا علمنا بقتل القائد بعد رمي الرامي رصاصته، فما هي القيمة الاحتمالية لركوب القائد في السيارة اليسارية؟

اتضح لنا من خلال ما تقدم ان هذه القيمة تتمثل في ($\frac{٨١}{٨٢}$) أي: ان ركوب القائد في السيارة اليسارية يحتل (٨١) طرفا من (٨٢) طرفا.

وعندما نعود الى العلم الاجمالي الكبير المؤلف من (١٠٠) طرف ، نلاحظ: أننا اذا اخذنا ـ العلم بقتل القائد ـ بنظر الاعتبار نجد أن بعض أطراف العلم الاجمالي الاول لا تتعايش مع بعض أطراف العلم الاجمالي الثاني، أي اننا حينما نضرب العلمين الاجماليين للحصول على القيمة الحقيقية لاحتمال ركوب القائد السيارة اليسارية على تقدير قتله، نجد اننا حينما نجمع بين الطرف الاول الى ← التاسع من أطراف العلم الاول مع الطرف العاشر من أطراف العلم الاجمالي الثاني لتكوين تسعة أطراف في العلم الاجمالي الكبير (الثالث)، نلاحظ ان هذا الطرف غير محتمل، وان الطرف (١) والطرف (10) لا يجتمعان على أرض الواقع، والحال كذلك بالنسبة للاطراف (٢ ـ 10) و(٣ ـ 10) و(٤ ـ 10) و(٥ ـ 10) و(٦ ـ 10)و(٧ ـ 10) و(٨ ـ 10) و(٩ ـ 10)، فهذه الاطراف تتنافى وتأبى اللقاء لاحياء طرف

جديد، بل هذا الطرف يولد ميتاً، لأننا بعد العلم بقتل القائد لا نحتمل اصابة الرامي السيارة اليسارية وجلوس القائد في السيارة اليمينية.

ونلاحظ أيضاً ان الطرف (١٠) من العلم الاجمالي الاول يتنافى ويأبى اللقاء مع الاطراف 1-2-3-4-5-6-7-8-9؛ لأننا بعد العلم بقتل القائد لا نحتمل جلوس القائد في السيارة اليسارية، واصابة الرامي السيارة اليمينية.

وعلى هذا الاساس سوف لا تحتفظ أطراف العلم الاول واطراف العلم الثاني بقيمها الاولية، التي اكتسبتها على أساس العلم الاول والثاني، بل تتغير هذه القيم على النحو التالي:

الطرف الاول للعلم الاجمالي الاول = $\frac{١}{١٠}$ ، بينما تضحي قيمته في العلم الثالث $\frac{٩}{٨٢}$ الطرف الثاني للعلم الاجمالي الاول = $\frac{١}{١٠}$ ، بينما تضحي قيمته في العلم الثالث $\frac{٩}{٨٢}$.

الطرف الثالث للعلم الاجمالي الاول = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٨٢/٩.

الطرف الرابع للعلم الاجمالي الاول = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٨٢/٩.

الطرف الخامس للعلم الاجمالي الاول = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٨٢/٩.

الطرف السادس للعلم الاجمالي الاول = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٨٢/٩.

الطرف السابع للعلم الاجمالي الاول = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٩/٨٢.

الطرف الثامن للعلم الاجمالي الاول = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٩/٨٢.

الطرف التاسع للعلم الاجمالي الاول = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٩/٨٢.

الطرف العاشر للعلم الاجمالي الاول = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٩/٨٢.

الطرف الاول للعلم الاجمالي الثاني = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٩/٨٢.

الطرف الثاني للعلم الاجمالي الثاني = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٩/٨٢.

الطرف الثالث للعلم الاجمالي الثاني = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٩/٨٢.

الطرف الرابع للعلم الاجمالي الثاني = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٩/٨٢.

الطرف الخامس للعلم الاجمالي الثاني = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٩/٨٢.

الطرف السادس للعلم الاجمالي الثاني = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٩/٨٢.

الطرف السابع للعلم الاجمالي الثاني = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٩/٨٢.

الطرف الثامن للعلم الاجمالي الثاني = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٨٢/٩.

الطرف التاسع للعلم الاجمالي الثاني = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث ٨٢/٩.

الطرف العاشر للعلم الاجمالي الثاني = ١٠/١ بينا تضحي قيمته في العلم الثالث $\frac{١}{٨٢}$.

اذن! اذا اردنـا ان نُقيِّم درجـة احتـمال ركوب القائد في السيارة اليسارية على تقدير قتله، واردنا ان نحدد القيمة التي يؤول اليها كل طرف من اطراف العلم الاجمالي الاول والثاني، لابد لنا من الضرب بين مجموعة اطراف العلم الاول والثاني، وتكوين علم اجمالي ثالث، وفرز الصور المتنافية.

نعود الى العلمين الاجماليين اللذين تتنافى اطرافهما، لنرى اننا لاجل تحديد القيمة الحقيقية للاحتمال، وتحديد قيم اطراف العلم الأول والثاني لابد لنا من الضرب بين العلم الاجمالي الاول والعلم الاجمالي الثاني، وهذا الضرب هو الذي اطلق عليه الاستاذ الشهيد (قاعدة الضرب في العلوم الاجمالية)، وهذه القاعدة تقع في طول بديهيات نظرية الاحتمال وهي مستنتجة على اساسهـا، اي: ان قاعـده الضرب يصح اجراؤها بعد التاكد من صدق بديهيات نظرية الاحتمال.

و ـ بديهية الحكومة:

تقدم ان العلوم الاجمالية التي ترتبط بحادثة من الحوادث تنقسم الى قسمين:

الاول ـ العلوم الاجمالية غير المتنافية.

الثاني ـ العلوم الاجمالية المتنافية.

ومن الواضح اننا اذا واجهنا حادثة يتعلق بها علمان اجماليان متنافيان، فلا يمكننا تقييم درجة احتمال الحادثة على أساس الضرب المحض بين (العلم ١) و(العلم ٢)، وتكوين علم ثالث نتيجة الضرب بين اعضاء العلمين، بل لابد لنا من احد طريقين:

الطريق الاول ـ استخدام قاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية التي تقرر ضرب عدد أعضاء (العلم ١) في عدد أعضاء (العلم ٢)، ثم فرز الصور غير المحتملة، وتكوين (علم ٣) مؤلف من الصور المحتملة فقط، وتقييم درجة احتمال الحادثة على أساس العلم الثالث.

الطريق الثاني ـ تقييم درجة احتمال الحادثة على أساس احد العلمين، والغاء الآخر من الحساب.

ولا يتعين استخدام الطريق الثاني ما لم تنطبق على العلمين (قاعدة الحكومة)، أي أن يكون احد العلمين حاكمًا على العلم الآخر، ولا يسمح له بالتدخل في تقييم درجة احتمال الحادثة، ولايضاح مورد هذه القاعدة نحاول هنا ان نبدأ بالمثال التالي:

اذا كان هناك عشرة مرضى يرقدون في المستشفى (س)، وعلمنا بموت احد الراقدين في المستشفى (س) فما هي قيمة احتمال موت كل واحد من اولئك المرضى.

الجواب واضح: اذ لدينا علم اجمالي مؤلف من عشرة أطراف، وليس هناك مبرر لترجيح موت أي منهم على موت الآخر.

اذن: ح = $\frac{١}{١٠}$.

لكن اذا حصل لنا العلم بأن مريضاً آخر رقد في احد المستشفيين (س) او (ص)، وكان اقبال المرضى على كلا المستشفيين بنسبة واحدة، علماً ان المستشفى (ص) لم يمت فيه احد.

في هذه الحالة سيكون المريض الحادي عشر داخلاً في اطار مجموعة العلم الاجمالي الاول، أي سوف يكون من المحتمل ان المريض الحادي عشر هو المريض الميت في المستشفى (س)، وهذا يعني ان مجموعة أطراف العلم الاجمالي الاول تصبح أحد عشر طرفاً.

حتى الآن يصبح لدينا علمان اجماليان يتألف الأول منهما من أحد عشر طرفاً، وهو العلم بموت احد الراقدين في المستشفى (س)، ويتألف الثاني من طرفين، وهو العلم بدخول المريض الحادي عشر الى احد المستشفيين (س) او (ص).

نطرح السؤال التالي:

ما هي العلاقة بين أطراف العلم الاجمالي الاول والعلم الاجمالي الثاني، هل هي علاقة التنافي أم علاقة التعايش ؟.

اذا لاحظنا الطرف الحادي عشر من العلم الاول والطرف الثاني من العلم الثاني نجدهما متنافيين، أي أن احتمال موت المريض الحادي عشر لا يجتمع مع احتمال دخوله في المستشفى (ص).

تقدم ان قاعدة الضرب في العلوم الاجمالية تعني: اذا كان لدينا علمان اجماليان تتنافى بعض اطرافهما، فعلينا ان نضرب العلمين في بعضهما، ونفرز الصور المتنافية، ونُقيّم درجة احتمال الحادثة، ونحدد احتمال كل طرف، في

ضوء ذلك.

ونحن لدينا في المثال المتقدم علمان اجماليان تتنافى بعض اطرافهما، فهل نُقيّم درجة احتمال الحادثة، واحتمال كل طرف على اساس قاعدة الضرب في العلوم الاجمالية ام لا؟

اذا اردنا ان نستخدم قاعدة الضرب في العلوم الاجمالية علينا ان نضرب العلم الاول في العلم الثاني، ونؤلف علما اجماليا ثالثا، وهو حاصل ضرب كلا العلمين، ونفرز الاطراف غير المحتملة. بعد الضرب تصبح امامنا الصور التالية:

١ـ أن يموت المريض رقم (١) والمريض الحادي عشر في المستشفى (س).

٢ـ أن يموت المريض رقم (٢) والمريض الحادي عشر في المستشفى (س).

٣ـ أن يموت المريض رقم (٣) والمريض الحادي عشر في المستشفى (س).

٤ـ أن يموت المريض رقم (٤) والمريض الحادي عشر في المستشفى (س).

٥ـ أن يموت المريض رقم (٥) والمريض الحادي عشر في المستشفى (س).

٦ـ أن يموت المريض رقم (٦) والمريض الحادي عشر في المستشفى (س).

٧ـ أن يموت المريض رقم (٧) والمريض الحادي عشر في المستشفى (س).

٨ـ أن يموت المريض رقم (٨) والمريض الحادي عشر في المستشفى (س).

٩ـ أن يموت المريض رقم (٩) والمريض الحادي عشر في المستشفى (س).

١٠ـ أن يموت المريض رقم (١٠) والمريض الحادي عشر في المستشفى (س).

١١ـ أن يموت المريض رقم (١١) والمريض الحادي عشر في المستشفى (س).

١٢ـ أن يموت المريض رقم (١) والمريض الحادي عشر في المستشفى (ص).

١٣ـ أن يموت المريض رقم (٢) والمريض الحادي عشر في المستشفى (ص).

١٤ـ أن يموت المريض رقم (٣) والمريض الحادي عشر في المستشفى (ص).

١٥ـ أن يموت المريض رقم (٤) والمريض الحادي عشر في المستشفى (ص).

١٦ـ أن يموت المريض رقم (٥) والمريض الحادي عشر في المستشفى (ص).

١٧ـ أن يموت المريض رقم (٦) والمريض الحادي عشر في المستشفى (ص).

١٨ـ أن يموت المريض رقم (٧) والمريض الحادي عشر في المستشفى (ص).

١٩ـ أن يموت المريض رقم (٨) والمريض الحادي عشر في المستشفى (ص).

٢٠ـ ان يموت المريض رقم (٩) والمريض الحادي عشر في المشفى (ص).

٢١ـ ان يموت المريض رقم (١٠) والمريض الحادي عشر في المشفى (ص).

٢٢ـ ان يموت المريض رقم (١١) والمريض الحادي عشر في المشفى (ص).

وبما ان الصورة الاخيرة غير محتملة، يبقى لدينا (٢١) طرفا، وهذا يعني ان تطبيق قاعدة الضرب في العلوم الاجمالية على المثال يؤدي الى اعطاء احتمال موت المريض الحادي عشر قيمة احتمالية مقدارها ($\frac{١}{٢١}$) كما يؤدي الى خفض قيمة احتمال دخول المريض الحادي عشر المشفى (ص) من ($\frac{١١}{٢٢}$) الى ($\frac{١٠}{٢١}$).

لكن قاعدة الضرب في العلوم الاجمالية لا مجال لتطبيقها على هذا المثال:

نلاحظ اننا في حال علمنا بان هناك عشرة مرضى في المشفى (س)، وشكنا بوجود المريض الحادي عشر، لا يمكننا ان نمنح المريض الحادي عشر نفس القيمة الاحتمالية التي نمنحها لكل واحد من المرضى العشرة، على اساس العلم الاجمالي بموت احد مرضى المشفى (س)، لان العلم الاجمالي بموت احد مرضى المشفى (س) لايحدد عدد اعضاء مرضى المشفى (س)، انما يتحدد عدد مرضى المشفى (س) بواسطة علم او علوم اخرى، فالاعضاء العشرة نعلم يقينا بانهم راقدون في المشفى (س)، ومن

ثم فهم يتوفرون على قيم احتمالية متساوية من العلم الاجمالي بموت احد الراقدين في المشفى (س)، اما المريض الحادي عشر، فنحن نشك باتصافه بصفة (انه راقد في المشفى «س»)، ومن ثمّ نشك في كونه عضوا من اعضاء مجموعة العلم الاجمالي بموت احد المرضى الراقدين في المشفى (س).

ولكن كيف نحدد قيمة احتمال موت المريض الحادي عشر؟

ان قيمة هذا الاحتمال تتحدد اساسا تبعا لقيمة احتمال اثبات كونه عضوا من اعضاء العلم الاجمالي، فالقيمة الاحتمالية التي تحدد لنا درجة توفر الصفة (انه راقد في المشفى «س») في المريض الحادي عشر، ومن ثم تحدد لنا قيمة احتمال كونه عضوا من اعضاء العلم الاجمالي بموت احد الراقدين في المشفى (س)، هي التي يتم على اساسها تحديد قيمة احتمال موت المريض الحادي عشر.

وبعبارة اخرى، اننا ما دمنا نشك باتصاف المريض الحادي عشر بكونه راقدا في المشفى (س)، فهذا يعني اننا نملك علما اجماليا يمنح اتصاف المريض بتلك الصفة قيمة محددة، ونفس هذه القيمة تثبت لنا كونه طرفا من اطراف العلم الاجمالي، وعلى اساسها يستمد المريض الحادي عشر قيمة احتمالية من العلم الاجمالي الاول (العلم بموت احد مرضى المشفى (س)، وحينئذ ستكون قيمة احتمال موته تساوي قيمة احتمال دخوله (س) مضروباً في قيمة احتمال موته على تقدير دخوله المشفى (س).

وبهذا يتضح ان احتمال موت المريض الحادي عشر يستمد قيمته من العلم الاجمالي بكونه راقداً في المشفى (س)، ومن هنا لا يمكن ان تتعارض هذه القيمة الاحتمالية (احتمال موته) مع القيمة الاحتمالية التي يحددها العلم الاجمالي الثاني (العلم بكونه راقداً في المشفى (س) أو المشفى (ص) . كما

تفترض قاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية.

ومن هنا يمكننا أن نقول:

(اذا وجدت قيمتان لحتماليتان مستمدتان من علمين اجماليين احداهما مثبته لقضية ما والاخرى نافية لها، وكانت احدى القيمتين في اثباتها او نفيها تنفي طرفية تلك القضية للعلم الاجمالي الآخر دون العكس، فهي حاكمة على الاخرى، ولا تصلح الاخرى للتعارض معها، ومن ثمّ لا مبرر للضرب وتكوين علم اجمالي ثالث).

وهذه القاعدة نطلق عليها (بديهية الحكومة)، ونعتبرها البديهية الاضافية الثالثة، التي تعتمدها نظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي.

ولأجل تجلية هذه القاعدة بشكل اكبر، نعود الى الجدول الذي رسمناه لقاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية، حيث كان لدينا علمان اجماليان: (العلم ١) العلم بموت احد مرضى المشفى (س) و (العلم ٢) العلم بأن المريض الحادي عشر اما ان يكون راقدا في المشفى (س) او المشفى (ص)، وهذان العلمان الاجماليان بعد الضرب يشكلان علما اجماليا مؤلفا من (٢١) طرفا، لان (الطرف الحاديعشر)يتعارض ويتنافى مع الطرف الثاني من العلم الثاني.

من الواضح ان اجراء قاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية يعتمد اساسا على افتراض التنافي والتعارض بين اطراف العلم الاول واطراف العلم الثاني، لكن افتراض التنافي في مثالنا غير صحيح، لان التنافي والتعارض انما يتم بين العلمين الاجماليين المتكافئين، بينا (العلم ٢) حاكم على العلم الاول، لان القيمة الاحتمالية التي يستمدها الطرف الحادي عشر من العلم الاول تتوقف على (العلم ٢).

وبعبارة اخرى: ان التنافي بين القيمة الاحتمالية الحادية عشرة للعلم الاول، والقيمة الاحتمالية الثانية للعلم الثاني غير معقول، لان القيمة الاحتمالية الثانية تنفي ان يكون المريض الحادي عشر نزيلا في المشفى (س)، ومن ثم فهي تنفي كونه عضوا من اعضاء العلم الاجمالي الاول.

ز- مشكلات العلوم الاجمالية الشرطية:

ينصب العلم الاجمالي على قضية حملية احيانا، وينصب احيانا اخرى على قضية شرطية، فقد اعلم بزيارة وزير لمدينتنا واشك في كونه الوزير (آ)، (ب) ....، فالعلم هنا ينصب على قضية حملية (ان وزيرا سيزور مدينتنا)، وقد لا اعلم ولا اجزم بتحقق زيارة احد الوزراء، ولكنني اعلم انه اذا زار مدينتنا احد الوزراء فهو اما (آ) او (ب)......

فالعلم هنا منصب على قضية شرطية، ونطلق على العلم الاجمالي الاول (العلم الاجمالي الحملي)، وعلى الثاني (العلم الاجمالي الشرطي).

والعلم الاجمالي الشرطي يثير امامنا مشكلتين رئيسيتين، نستطيع ان نفيد من معالجة احداهما قاعدة، وتلزمنا الثانية باتخاذ بديهية، تكون اساسا لنظرية الاحتمال، وسنأتي هنا على عرض كلتا المشكلتين ودراستهما:

المشكلة الاولى:

اذا كنا في يوم ١/١٠ نعلم بان (س) لديه امتحان دراسي يحصل في ضوءه على درجة الدكتوراه في القاهرة يوم ١/٢٠، وكنا نحتمل مرضه خلال هذه الايام بدرجة ١/٢، لكننا نعلم ايضا انه اذا لم يكن مريضا فسوف يسافر حتما اما في يوم ١/١٤، او ١/١٥،...... او ١/١٨، اي اننا نعلم باحدى

القضايا الشرطية التالية:

١ـ اذا لم يكن (س) مريضا فسوف يسافر الى القاهرة يوم ١/١٤.

٢ـ اذا لم يكن (س) مريضا فسوف يسافر الى القاهرة يوم ١/١٥.

٣ـ اذا لم يكن (س) مريضا فسوف يسافر الى القاهرة يوم ١/١٦.

٤ـ اذا لم يكن (س) مريضا فسوف يسافر الى القاهرة يوم ١/١٧.

٥ـ اذا لم يكن (س) مريضا فسوف يسافر الى القاهرة يوم ١/١٨.

ومن الواضح ان كل قضية من هذه القضايا الشرطية تشكل طرفا من اطراف العلم الاجمالي، ومن ثم فهي محتملة بدرجة $\frac{١}{٥}$.

لكن اجتماع هذا العلم الشرطي مع العلم الاجمالي الحملي الذي حددنا في ضوءه قيمة احتمال مرض (س) بـ (١/٢) يضعنا امام مشكلة تقييم درجة الاحتمال الحملي، في حال اكتشافنا كذب الجزاء في بعض القضايا الشرطية المحتملة. فاذا علمنا مثلا بان (س) لم يسافر في اليوم ١/١٤ واليوم ١/١٥، وكنا في اليوم ١/١٦ قبل اقلاع الطائرة، فهل ان قيمة احتمال ان يكون (س) مريضا ستبقى على (١/٢) ام ستتغير؟

نلاحظ القضية الشرطية التالية:

(اذا كان مسيلمة نبيا فهو حسن الاخلاق).

هذه القضية الشرطية لها شرط، وهو (نبوة مسيلمة)، ولها جزاء، وهو (حسن اخلاقه).

ومن الواضح ان هذه القضية الشرطية قضية متيقنة لدينا لان النبي لا بد ان يكون حسن الخلق، فاذا ثبت لدينا ان مسيملة سيىء الخلق فسوف يثبت لدينا حتما ان مسيلمة ليس نبيا.

نلاحظ هنا اننا على يقين بصدق القضية الشرطية (اذا كان مسيلمة

نبيا فهو حسن الاخلاق)، اي اننا نحتمل صدق هذه القضية بدرجة ($\frac{١}{١}$)، والسر في ذلك ان صدق القضية الشرطية امر ثابت، وكذب الجزاء امر ثابت ايضا، ولكي تحافظ القضية الشرطية على صدقها فسوف تدل على كذب الشرط بنفس الدرجة التي تثبت فيها صدقها لان القضية الشرطية التي كذب جزاؤها لا تحافظ على صدقها الا بثبوت كذب شرطها.

نعود الى القضايا الشرطية المحتملة:

١ـ اذا لم يكن (س) مريضاً فسوف يسافر الى القاهرة يوم ١/١٤.

٢ـ اذا لم يكن (س) مريضاً فسوف يسافر الى القاهرة يوم ١/١٥.

٣ـ اذا لم يكن (س) مريضاً فسوف يسافر الى القاهرة يوم ١/١٦.

٤ـ اذا لم يكن (س) مريضاً فسوف يسافر الى القاهرة يوم ١/١٧.

٥ـ اذا لم يكن (س) مريضاً فسوف يسافر الى القاهرة يوم ١/١٨.

نلاحظ هنا ان كل واحدة من هذه القضايا الشرطية قضية محتملة بدرجة $\frac{١}{٥}$، لان كل واحدة منها طرف من اطراف العلم الاجمالي الشرطي.

وبما ان القضية الشرطية صادقة بدرجة $\frac{١}{٥}$، وقد كذب جزاؤها، اي: ثبت ان (س) لم يسافر الى القاهرة يوم ١/١٤، حينئذ ستثبت كذب الشرط بنفس درجة صدقها، اي بدرجة $\frac{١}{٥}$، هذا اذا ثبت كذب الجزاء في قضية شرطية واحدة، اما اذا ثبت كذب الجزاء في قضيتين شرطيتين من قضايا العلم الاجمالي، فهذا يعني ان كل واحدة من القضيتين الشرطيتين تثبت (مرض س) اي كذب الشرط بدرجة $\frac{١}{٥}$، حينئذ سيكون احتمال

مرض (س) مساوياً لـ $\frac{١}{٥} + \frac{١}{٥} = \frac{٢}{٥}$.

في هذا الضوء يمكن ان نستنتج قاعدة تفيدنا في حساب احتمال قيمة الحوادث، وهي ان:

كل علم اجمالي شرطي ـ يضم مجموعة من القضايا الشرطية المحتملة، التي تشترك في شرط واحد،وتختلف في اجزاءاتها ـ ينفي الشرط المشترك بقيمة احتمالية تساوي حاصل جمع القيم الاحتمالية للقضايا الشرطية المحتملة التي علمنا بكذب جزاءها، في اطار مجموعة اطراف العلم الاجمالي الشرطي.

المشكلة الثانية:

ان العلوم الاجمالية الشرطية يمكن ان نقسمها الى قسمين، تبعا لطبيعة جزاءها:

اولا ـ العلوم الاجمالية ذات الواقع المحدد.

ثانيا ـ العلوم الاجمالية التي ليس لها واقع محدد.

فالعلم الاجمالي قد يكون جزاؤه مشيرا الى امر محدد في لوح الواقع ولكن جهلنا وعدم اطلاعنا يجعلنا نتردد ونُعدد بدائل الجزاء، كما في المثال التالي:

اذا ذهبت الى المستشفى هذه الساعة فسوف أجد الدكتور (س) أو (ص) أو (ع)...

لنلاحظ الجزاء في هذه القضية الشرطية (سأجد الدكتور (س) او (ص) او (ع).....) نجد ان الجزاء يتحدث عن امر لانستطيع تحديده بحكم

عدم اطلاعنا، لكن الجزاء محدد في الواقع؛ اذ لو سألنا استعلامات المستشفى فسوف تخبرنا بالدكتور المناوب في تلك الساعة، ونحن نطلق على هذا العلم الاجمالي (العلم الاجمالي ذو الواقع المحدد).

ويمكن ان يكون لدينا علم اجمالي شرطي ليس لجزاءه واقع محدد، اي ان جزاءه لا يتحدث عن الواقع، كما هو الحال في المثال التالي:

لو علمنا ان المستشفى (س)، الذي نريد مراجعته هذه الليلة لا يتوفر على جهاز للتصوير الشعاعي، ونعلم ايضا ان اجهزة التصوير الشعاعي المتوفرة فعلا في مستشفيات البلاد محصورة في الانواع التالية (آ)، (ب)، (ج)، حينئذ سيكون لدينا العلم الاجمالي التالي:

اذا كان هناك جهاز تصوير في المستشفى (س) فهو اما ان يكون من النوع (آ) او (ب) او (ج).

وعند تحليل هذا العلم الاجمالي الشرطي نجده متمثلاً في ثلاث قضايا شرطية محتملة:

١ـ اذا كان في المستشفى (س) جهاز تصوير فهو من النوع (آ).

٢ـ اذا كان في المستشفى (س) جهاز تصوير فهو من النوع (ب).

٣ـ اذا كان في المستشفى (س) جهاز تصوير فهو من النوع (ج).

ولكن لو راجعنا مسؤول المشتريات في المستشفى فهل يستطيع ان يحدد لنا نوع الجهاز المفترض وجوده في المستشفى (س)؟

طبعا لا يستطيع ان يحدد، بل لا يحدد نوعية هذا الجهاز حتى علام الغيوب. والسر في ذلك ان الجزاء في العلم الاجمالي لا يتحدث عن الواقع، فتتعدد البدائل في الجزاء لعدم اطلاعنا الكامل، بل تتعدد البدائل في الجزاء

لكي نتجنب الوقوع في التناقض بين الافتراضات، فما دمنا قد افترضنا وجود الجهاز وافترضنا انحصاره في النوع (آ) او (ب) او (ج)، فلا بد ان تتعدد بدائل الجزاء المترتب على الافتراض الاول.

السؤال المطروح هنا:

هل يمكننا ان نُقيّم درجة احتمال الحوادث على اساس هذا العلم الاجمالي ام لا؟

طبعا لا نستطيع ان نقيّم درجة احتمال الحوادث في ضوء هذا العلم الاجمالي الشرطي، لان الاحتمال يرتبط بتقييم الواقع، ونحن نريد بتنمية درجة الاحتمال ان نقترب من تحديد الواقع المردد بين بدائل متعددة، بينا ليس لهذا العلم الاجمالي الشرطي واقع يتحدث عنه، بل واقعه على افتراض الشرط يبقى مرددا الى ما لانهاية؛ ولذا لا يستطيع احد مهما بلغت درجة معلوماته على رفع، التردد، الذي يلفّ هذا العلم الاجمالي.

ومن هنا يمكننا ان نتخذ هذا المفهوم كأساس ومبدأ من مبادىء نظرية الاحتمال، ونقول:

(ان الشرط الاساس للافادة من العلوم الاجمالية الشرطيه في تقييم درجة احتمال الحوادث ان تكون هذه العلوم ذات واقع محدد).

وهذه هي البديهية الاضافية الرابعة، التي ينبغي اضافتها الى قائمة البديهيات، التي ترتكز عليها نظرية الاحتمال المختارة.

استنتاج وتلخيص:

اتضح لنا ان الاتجاه الجديد في نظرية الاحمال، والذي سميناه (نظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي) يعتمد المبادىء والبديهيات الرياضية،

التي تفترضها نظريات الاحتمال ويفسر الاحتمال الرياضي على اساس العلم الاجمالي ويرى هذا الاتجاه ان نظرية الاحتمال بحاجة الى بديهيات اضافية اخرى، ترتبط الاولى بافتراض قسمة العلم الاجمالي على اعضاء مجموعته بالتساوي، وتعرف الثانية بشكل دقيق المجموعة، وتؤكد الثالثة على ان بعض العلوم الاجمالية تلغي دور العلوم الثانية التي تشترك معها في تقييم درجة الاحتمال، وتنص الرابعة على ان العلوم الاجماليه الشرطيه اذا لم تتحدث عن الواقع، لا يمكن تقييم درجة الاحتمال ـ الذي يرتبط في جوهره بالواقع ـ على اساسها.

وتحسن الاشارة هنا الى ان هناك بديهية خامسة، ترتبط ببديهية الحكومة (البديهية الثالثة)، وتطرح مصداقا لهذه البديهية، وقد اكد السيد الشهيد على ان الحالة التي نفسر بها الموقف في البديهية الخامسة على اساس (بديهية الحكومة) يمكن تفسيره ايضا على اساس قاعدة الضرب.

وقاعدة الضرب بين العلوم الاجماليه هي القاعدة التي يعتمدها تقييم الاحتمال، بعد التأكد من ان العلاقة بين العلمين الاجماليين ليست هي (الحكومة).

* * *

الفصل الرابع

نظرية الاحتمال والدليل الاستقرائي

الفقرة الاولى: الاستقراء والنظرية الرياضية للاحتمال

الفقرة الثانية: الاستقراء ونظرية الاحتمال لدى الشهيد الصدر



الفصل الرابع
نظرية الاحتمال والدليل الاستقرائي

الاستقراء ـ كما هو الشائع في تعريفه ـ انتقال من الجزئيات الى الحكم العام، وبغية الانتقال الى الحكم العام علينا ان نختبر بعض الجزئيات، فاذا وجدناها متصفة بصفة ما، نقول ان: (أ) تتصف بـ (ب).

مثال:

نأخذ المثال التقليدي المعروف (الحديد يتمدد بالحرارة)، واذا رمزنا الى الحديد بـ (أ)، والى التمدد بالحرارة بـ (ب) نقول: (كل أ هي ب)، وهذا حكم عام.

نتساءل: من اين جاء هذا الحكم العام؟

الجواب: اننا لاحظنا (أ ١) اي قطعة الحديد رقم (١)، فوجدناها تتمدد بالحرارة،ولاحظنا (أ ٢) اي قطعة الحديد رقم (٢)، فوجدناها تتمدد بالحرارة ايضا، وهكذا الى (أن) من القطع الحديدية، ومن ثَمَّ استطعنا ان نعمم، ونقول ان (كل أ هي ب).

من المتفق عليه في منطق الاستقراء ان التعميم المذكور في المثال المتقدم ليس تعميما يقينيا:اذ اننا اختبرنا بعض قطع الحديد، ولم نختبر كل قطع الحديد الموجودة في العالم، ومن هنا فمن المعقول ان تكون هناك بعض قطع الحديد التي لا تتمدد بالحرارة.

وبعبارة اخرى: اننا مع افتراض صدق المقدمات، وان قطع الحديد التي لاحظناها تتمدد بالحرارة حقا، يمكن ايضا ان تكذب النتيجة، وهذا يعني ان التعميم الاستقرائي بصيغته المتقدمة (كل أ هي ب) ليس مستنتجا استنتاجا منطقيا من مقدماته الاستقرائية، وهذا امر تجمع عليه كل مدارس المنطق الاستقرائي.

بل يتفق رجال المنطق منذ ارسطو حتى اليوم على ان مقدمات الاستقراء قرائن تفيد الظن بالنتيجة، اي اننا اذا اعتمدنا في استخلاص النتيجة الاستقرائية على مجموعة الاختبارات الجزئية، التي اجريناها فحسب، فسوف تحصل النتيجة على قيمة احتمالية كبيرة. ويصح لنا القول: اننا نحتمل احتمالا قويا بان كل حديد يتمدد بالحرارة ،او ان (كل أ هي ب).

ومن المتفق عليه منطقيا ان زيادة عدد الاختبارات الناجحة يرفع قيمة احتمال النتيجة، وقد تبلغ الى ما يقرب اليقين، لكنها اي النتيجة الاستقرائية لا يمكن ان تبلغ اليقين وتساوي (١)، مهما كبر عدد الاختبارات، بل تبقى النتيجة متمثلة في كسر اصغر من واحد.

لكن الخلاف قائم بين مناطقة الاستقراء في تعيين الاسلوب، الذي يتم بموجبه تحديد القيمة الاحتمالية للنتيجة الاستقرائية، اي الاساس الذي يتم بموجبه السماح للاختبارات الناجحة في اعطاء النتيجة الاستقرائية قيمة احتمالية اكبر مما كانت عليه قبل كل اختبار.

والسؤال الرئيس الذي يطرحه مناطقة الاستقراء المعاصرون في خلافهم حول تقييم الحكم الاستقرائي الاحتمالي هو:

هل ان نظرية الاحتمال، دون اخذ مبدأ العلية كمصادرة، قادرة على تفسير نمو درجة الاحتمال، وفقا لنجاح الاختبارات ام لا؟

اي: اننا اذا لم نأخذ العلية كمصادرة، ونفترض ان العلاقات القائمة بين موضوعات التجارب الاستقرائية ومحمولاتها هي من قبيل العلاقات الضرورية، فهل يتأتى لنا حينئذ ان نمنح القضية المستنتجة في ضوء التجارب الاستقرائية قيمة احتمالية كبيرة، ام لا؟

لنوضح هذا الموضوع الرئيس في ضوء المثال المتقدم:

كان لدينا في المثال المتقدم (أ) و (ب)، ونحن قد لاحظنا بعض مصاديق (أ) فوجدناها تتصف بـ (ب)، والتعميم المطلوب استنتاجه بقيمة احتمالية كبيرة هو (كل أ ب).

من الواضح ان كل اختبار من اختبارات (أ) يمثل في الواقع قرينة جديدة، تدعم التعميم المطلوب، وترفع قيمته الاحتمالية، فنحن حينما لاحظنا لاول مرة اقتران (أ) بـ (ب) فسوف نحتمل بدرجة ما ان (كل أ ب) ولكن بعد نجاح الاختبار الثاني والثالث.... سترتفع قيمة احتمال ان (كل أ ب).

حينما نحلل كل اختبار من اختبارات (أ) نجد ان (أ) تتمدد بتسليط الحرارة عليها، ونحن حينما نجري الاختبار الاول نلاحظ ان درجة احتمال (كل أ ب) اي ان كل حديد يتمدد بالحراة، لا تتعدى ($\frac{1}{2}$)، لكنها ستزداد حتما بعد عدد من التجارب وتتجاوز ($\frac{1}{2}$).

ولكن اذا افترضنا ـ تبعا لـ (دافيد هيوم) ـ ان العليّة هي علاقة اقتران وتتابع، وان ليس هناك من دليل على ان العلاقة بين السبب والمسبب

علاقة ضرورية، بحيث اذا وجد السبب تحتم وجود المسبب، فهل تتجاوز قيمة احتمال (كل حديد يتمدد بالحراة) الـ ($\frac{١}{٢}$) بعد اي عدد من التجارب ام لا؟

والاجابة على هذا الاستفهام تقسم التجريبيين الى فريقين:

١ـ الفريق الذي يجيب على الاستفهام بالنفي.

٢ـ فريق آخر يجيب على الاستفهام بـ (نعم).

ولعل اوضح من يمثل الفريق الاول هو الرياضي والفيلسوف الانجليزي المعاصر (برتراندراسل)، وقد تحدث عن هذا الموضوع في مناسبات مختلفة من دراساته، وضمن حديثه عن نظرية (دافيد هيوم) في العلية يقول:

«لنتساءل الان ماذا تراه رأينا في نظرية (هيوم) لهذه النظرية جزآن، احدهما موضوعي والاخر ذاتي، فالجزء الموضوعي مفاده.

حين نحكم بان (أ) تسبب (ب) فان ما حدث بقدر ما يتعلق الامر بـ (أ) و (ب) هو اننا قد لاحظنا مرارا وتكرارا اقترانهما، اعني ان (أ) قد اعقبتها فورا او بغاية السرعة (ب).

وليس لدينا حق ان نقول: ان (أ) يجب ان تعقبها (ب) في المناسبات المقبلة.

ومن ثم يجب علينا ان نفحص نظرية (هيوم) الموضوعية فحصا ادق، لهذه النظرية جزآن (١) فحين نقول (أ هي علة ب) فان كل ما لنا حق في قوله هو انه، في التجربة الماضية كانت (أ) و (ب) يتكرر ظهورهما معا في تعاقب سريع، ولم يلاحظ اي مثل لم تكن فيه (أ) متبوعة بـ (ب) او مصحوبة بها.

(٢) ايا كانت كثرة الامثلة التي قد نكون لاحظنا فيها اقتران (أ) و (ب) فان ذلك لا يزودنا باي سبب لتوقعهما مقترنين في مناسبات مستقبلة، وان كان ذلك علة لهذا التوقع، هذان الجزان من النظرية يمكن بسطهما على ما يلي:

١ـ في العلية ليس ثمة علاقة يتعذر تحديدها اللهم الا الاقتران او التعاقب.

٢ـ الاستقراء بمجرد العد ليس شكلا سليما للحجة، ولقد تقبل التجريبيون عامة القضية الاولى ونبذوا الثانية، وحين اقول انهم نبذوا الثانية، فانني اعني انهم اعتقدوا انه عندما يكون هناك تراكم كاف من امثلة الاقتران فان توقع وجود الاقتران في المثل التالي توقع يتخطى نسبة النصف. او اذا كانوا لم يأخذوا على الدقة بهذا، فقد اخذوا بنظرية ما، لها نتائج مماثلة..... سأكتفي بان الاحظ انه لو سلمنا بالنصف الاول من نظرية (هيوم) فان الاستقراء يجعل كل توقع بالنسبة للمستقبل غير معقول... ولست اقصد فقط ان توقعاتنا تبوء بالفشل... ؟وانما اقصد اننا حتى لو اخذنا اثبت توقعاتنا مثل ان الشمس ستشرق غدا، فليس ثمة من سبب لكوننا نفترض كونها اميل الى التحقق من دونه»[١].

على هذا الاساس يقرر (راسل) ان استخدام حساب الاحتمالاتَ بدون افتراض مصادرات العلية لا يؤدي الى رفع قيمة احتمال القضية العامة، فيقول:

(ليس في النظرية الرياضية للاحتمال مايبرر ان نعتبر الاستقراء

---

(١) تاريخ الفلسفة الغربية، الكتاب الثالث، الفلسفة الحديثة، برتراند راسل، ترجمة د. محمد فتحي الشنيطي ص ٢٦١.

محتملا، مهما يكن من وفرة عدد الاحوال الموافقة)[١].

ومن هنا لابد ـ لدى راسل ـ من الاستعانة بمبادىء غير استقرائية (تجريبية)؛ لانقاذ الدليل الاستقرائي، والافادة منه بوصفه يعبر عن درجة احتمالية كبيرة، اي ان الافادة من المبادىء الرياضية لحساب الاحتمال، وتطبيقها على الاستقراء يستدعي افتراض مبدأ او مبادىء لا يمكن اثباتها استقرائيا، ولذا نراه يقرر في تقويمه الاخير لفلسفة هيوم:

«ان شكية هيوم تستند استنادا كليا على نبذه لمبدأ الاستقراء، فمبدأ الاستقراء كما يطبق على العلية يقول: انه اذا وجدت (أ) مرات عديدة تصحبها (ب) او تعقبها، وليس ثمة مثل معروف عن (أ) لا تكون فيه مصحوبة بـ (ب) او تعقبها (ب) وعلى ذلك فمن المحتمل عند المناسبة التالية التي تلاحظ فيها (أ) ان تصحبها (ب) او تعقبها.... فاذا كان هذا المبدأ او أي مبدأ آخر يمكن ان يستنبط منه صحيحا، اذن لكانت الاستدلالات العلية التي يستبعدها (هيوم) صحيحة، ليس لكونها تزودنا باليقين، ولكن لكونها تزودنا بالاحتمال للأغراض العملية، فاذا لم يكن هذا المبدأ صحيحا، فان كل محاولة للوصول الى القوانين العامه العلمية من الملاحظــات الجزئيه فهي محاولة مغالطة، ولا منجاة لتجريبي من شكية (هيوم). والمبدأ ذاته لا يمكن بالطبع ـ بدون الدور في دائرة ـ ان يستدل اليه من الاتساقات الملحوظة مادام انه مطلوب لتبرير استدلال من هذا القبيل. فيجب اذن ان يكون مبدأ مستقلا ليس مؤسسا على التجربة او مستنبطا من مبدأ مستقل غير مؤسس على التجربة الى هذا

---

(١) المعرفة الانسانية، ص ٤١٧ ـ ٤١٨، نقلا عن مدخل جديد الى الفلسفة د. عبد الرحمن بدوي، الطبعة الثانية ـ ١٩٧٩، ص ١٠٧.

الحد اثبت هيوم ان النزعة التجريبية الخالصة ليست اساسا كافيا للعلم. ولكن اذا سلمنا بهذا المبدأ الواحد فان كل شيء آخر يمكن ان ينبع متسقا مع النظرية القائلة بان كل معرفتنا مؤسسة على التجربة».[1].

هذا هو موقف فريق من التجريبيين، ولعله يمثل رأي اغلبية دعاة المدرسة التجريبية.

اما الفريق الثاني فقد عبر عنه الدكتور زكي نجيب محمود قائلا:

«ان معظم من تناول الاستقراء بالبحث، ومن هؤلاء (رسل) نفسه، لايجدون مناصا من الاعتراف بوجود مبدأ عقلي لم نستمده من الخبرة الحسية، هو الذي يكون سندنا في تعميم الاحكام العلمية، فمهما بلغت في اخلاصك للمذهب التجريبي - في نظر هؤلاء - فلا مندوحة لك في النهايه عن ان تعترف بشيء لم يأتك عن طريق التجربة، وهو المبدأ القائل بان ما يصدق على بعض افراد النوع الواحد يصدق كذلك على بقية افراده، وبذلك يمكن التعميم، (فعلى فرض ان القوانين الطبيعية كانت قائمة في الماضي باطراد تام، فهل لدينا ما يبرر الفرض بان هذه القوانين ستظل كذلك قائمة في المستقبل؟)[2].

من اجل ذلك يرى (رسل) اننا في النهاية مضطرون في الاستقراء الى الرجوع الى اساس غير تجريبي وهو ما يسميه (مبدأ الاستقراء)[3]، (ان اولئك الذين يتمسكون بالاستقراء، ويلتزمون حدوده، يريدون ان يؤكدوا بان المنطق كله تجريبي، ولـذا فلا ينتظر منهم ان يتبينوا بان

---

(١) تاريخ الفلسفة الغربية ص ٢٧١ ـ ٢٧٢.

(٢) مشكلات الفلسفة، راسل، ص ١٠٠.

(٣) Principle of induction

الاستقراء نفسه ـ حبيبهم العزيز ـ يستلزم مبدأ منطقيا لا يمكن البرهنة عليه هو نفسه على اساس استقرائي، اذ لابدّان يكون مبدأ قبليا)[١].

فالرأي عند كثيرين ومنهم (رسل) كما بينا، هو ان التجربة الحسية وحدها لا تكفي (ولابد لنا اما ان نقبل مبدأ الاستقراء على اساس التسليم بصحته، فنعتبره دالا بنفسه على صدق نفسه، واما ان نبحث عبثا عن مبرر يبرر لنا ان نتوقع حوادث المستقبل قبل وقوعها (على اساس خبرة الماضي)[٢].

فسؤالنا الان هو: هل يجوز لنا الحكم بصحة الاستدلال من حوادث الماضي على حوادث المستقبل، دون الرجوع الى اي مبدأ عقلي قبلي كمبدأ الاستقراء الذي اقترحه (راسل) ـ اعني هل يمكن ان نعتمد في احكامنا الاستقرائية على التجربة الحسية وحدها، دون الرجوع الى اي مبدأ لا تكون التجربة الحسيه مصدره؟

افرض ـ مثلا ـ ان رجلا قفز من نافذة على ارتفاع بعيد من الارض فهل هناك ما يبرر الحكم بانه سيسقط حتما على الارض، وانه لن يتجه اتجاها آخر، كأن يرتفع الى السماء، او يتحرك في خط افقي؟ (هذا المثل ضربه (راسل) في سياق حديثه)، وسيجيب رجل العلم ورجل الشارع على السؤال بالايجاب، استنادا الى الخبرة السابقة في سقوط الاجسام، اي ان المبرر لها في الحكم هو ان الاجسام التي تماثل في ثقلها جسم الانسان، قد سقطت الى الارض حين أُلقي بها في تجاربنا الماضية.

لكن السؤال لايزال قائما: هل هناك مبرر عقلي يحتم ان تجيء هذه التجربة الجديدة مشابهه للتجارب الماضية؟ ونحن ـ دفاعا عن المذهب

---

(١) معرفتنا بالعالم الخارجي، راسل، ص ٢٢٦.

(٢) مشكلات الفلسفة، راسل، ص ١٠٦.

التجريبي ـ نسأل بدورنا: ماذا يريد هؤلاء بقولهم (مبرر عقلي)؟.... فالذين يقولون ان تجربة الماضي وحدها ليس فيها مبرر عقلي يجيز ان نحكم في ضوئها على المستقبل يريدون بهاتين الكلمتين (مبرر عقلي) صدقا يقينيا في النتيجة، او قل انهم يريدون بهما ان يكون الاستدلال استنباطا، نتيجته محتواة في مقدماته، وبذلك يستحيل ان تتعرض للخطأ. فان كان معنى كلمتي (مبرر عقلي) عندهم هو ان يكون الاستدلال استنباطيا، يقيني النتيجة، لاحتواء المقدمات عليها، فواضح ان الاستقراء لا يكون فيه (مبرر عقلي) بهذا المعنى لان الاستقراء ليس استنباطيا.

لكن لماذا نفهم (المبرر العقلي) بهذا المعنى؟ انها لاتعني ذلك في العلوم ولا في الحياة الجارية فلو قيل لي في الحياة الجارية ان أ سيلاعب ب، وانا لا اعرف عن أ، ب الا انهما لعبا ست مرات فيما سبق، فكسب أ في اربع منها، وكسب ب في اثنتين، فان هنالك مبررا من هذه الخبرة الماضية يبرر لي ان اقول بان أ سيكسب اللعب هذه المرة باحتمال ارجح من احتمال ان يكسب ب»[1].

اتجاه جديد:

بعد ان استعرضنا الاتجاهين الرئيسين في تطبيق نظرية الاحتمال على الدليل الاستقرائي يأتي دور الاتجاه، الذي كرسنا هذه الدراسة لتظهيره وطرحه، وهو اتجاه الاستاذ الشهيد الصدر:

هل ان الدليل الاستقرائي تطبيق لنظرية الاحتمال، ام ان الافادة من هذه النظرية في تقييم احتمال التعميم الاستقرائي يتوقف على اضافة مصادرات غير استقرائية الى جانب مصادرات نظرية الاحتمال؟

---

(١) المنطق الوضعي، الدكتور زكي نجيب محمود ج٢ ص ٢٩٨ ـ ٣٠١.

يتلخص اتجاه الشهيد الصدر في الاجابة على هذا الاستفهام:

ان الدليل الاستقرائي يمثل تطبيقا كاملا لنظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي، ولا نحتاج الى اضافة اي بديهية اخرى، اي ان الدليل الاستقرائي يمكنه ان ينمّي قيمه احتمال التعيميم الاستقرائي على اساس تكوين علم اجمالي تتكاثر عدد الاطراف المؤيدة للتعميم تبعا لزيادة عدد الاختبارات الناجحة، دون حاجة لاخذ مبدأ السببية كمصادره اضافية ملحقة بنظرية الاحتمال.

ويرتكز هذا الاتجاه في موقفه من السببية على تحليل لهذا المفهوم، حيث ان العلية تنحل الى القضيتين التاليتين:

١ـ ان لكل حادثة سببا.

٢ـ ان الشيء ما لم يجب لم يوجد.

والقضيه الاولى تقرر استحالة وجود حادثة من الحوادث بدون علة وسبب، ومن ثم فعدم السبب يقتضي عدم المسبب.

اما القضية الثانية فهي تقرر علاقة الضرورة والحتمية بين وجود السبب والمسبب، فالمسبب لا يوجد ما لم توجد علته التامة، واذا وجدت علته التامه تحتم وجوده بالضرورة.

يرى الشهيد الصدر ان الدليل الاستقرائي بوصفه مسيرة لحشد الشواهد والقرائن على صحة التعميم الاستقرائي يمكنه ان يمضي في حركته باتجاه جمع هذه الشواهد، وسوف يحصل التعميم الاستقرائي بعد التوفر على الشواهد والقرائن الجديدة على قيمة احتمالية اكبر، وفقا لمبادىء الاحتمال ونظريته المتقدمة، دون ان يحتاج الدليل الاستقرائي لاتخاذ اي

واحدة من القضيتين المتقدمتين كمصادرة ومبدأ افتراضي.

نعم يحتاج الدليل الاستقرائي او نظرية الاحتمال في تطبيقها على الدليل الاستقرائي الى افتراض الشك في القضية الثانية فحسب، اي الشك في ان العلاقة بين العلة والمعلول هل هي علاقة الضرورة والحتمية، ام هي علاقة التتابع والاقتران المطرد؟

ويؤكد الاتجاه الجديد على اننا حتى اذا افترضنا الايمان بعدم استحالة وجود حادثة بلا سبب يمكننا ان ننمي قيمة احتمال التعميم الاستقرائي على اساس نظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي.

وتنظيما للبحث نضع القادم من هذا الفصل في فقرتين، نناقش في الفقرة الاولى الاتجاه الذي يرى ان التعميم الاستقرائي يمكن تنمية قيمته الاحتمالية على اساس النظرية الرياضية للاحتمال، و نكرس الفقرة الثانية لعرض وايضاح الاتجاه الذي تبناه الشهيد الصدر.

الفقرة الاولى: الاستقراء والنظرية الرياضية للاحتمال

تقدم ان هناك اتجاهاً ـ بين الباحثين في منطق الاستقراء ـ يذهب الى ان الدليل الاستقرائي يمثل تطبيقا لنظرية الاحتمال، ولا نحتاج لأجل الحصول علي قيمة عالية للتعميم الاستقرائي الى اضافة مصادرات غير استقرائية للمبادىء الرياضية التي تعتمدها نظرية الاحتمال.

ومن التواضح ان النظرية الرياضية (الكلاسيكية) بزعامة (لابلاس)، هي التي ارست صيغ هذا الاتجاه، وقبل ان نوضح هذا الاتجاه اعود الى النص الذي نقلناه عن (المنطق الوضعي) حيث تبنى د. زكي نجيب محمود هذا الاتجاه.

حاول الدكتور محمود ان يوفق بين الاتجاه الذي يقول: انه لامبرر عقلي للركون الى التعميم الاستقرائي، دون افتراض مبادئ قبلية تضاف الى مبادئ الاحتمال، وبين الاتجاه الذي اكد عليه والذي يقول: هناك مبرر لمنح التعميم الاستقرائي قيمة احتمالية اكبر على اساس تكرار وقوع الحوادث.

حينما ندقق في نص الدكتور زكي، وفي مجموع ما نقلناه وما قاله (راسل) نلاحظ ما يلي:

١ـ ان التوفيق الذي اصطنعه الدكتور زكي نجيب محمود يرتهن اساسا بامكان تعدد محط نظر القائلين بـ (المبرر العقلي)، فالذين قالوا ليس هناك مبرر عقلي للركون الى التعميم الاستقرائي على اساس نظرية الاحتمال فحسب، ارادوا المبرر العقلي لليقين بالتعميم الاستقرائي، اما الذين قالوا بوجود مبرر عقلي فقد ارادوا المبرر العقلي لاحتمال التعميم الاستقرائي.

٢ـ لعل هناك باحثين (لم يشر الدكتور زكي الى نصوصهم) ارادوا المبرر العقلي لليقين بالتعميم الاستقرائي! ولكن كيف يمكن للدكتور محمود ان يفهم بان مراد «راسل» (الذي اكد عليه ونقل نصوصه) من المبرر العقلي المبرر العقلي لليقين بالتعميم الاستقرائي؟ ان مراجعة للنصوص المتعدده التي نقلناها عن (راسل) توضح بجلاء ان الرجل كان صريحا في مذهبه بان انكار مبدأ الاستقراء يعطل الدليل الاستقرائي عن منح التعميم الاستقرائي قيمة احتمالية معقولة (اي تزيد على ($\frac{١}{٢}$).

٣ـ اذا اردنا ان نحمل كلام الدكتور زكي نجيب محمود محمل الجد فهذا يعني ان افتراض (راسل) لضروة المبدأ الاستقرائي كمبرر عقلي

للتعميم الاستقرائي يجعل (راسل) في مصاف القائلين بان الدليل الاستقرائي يفيد يقينا منطقيا بالنتيجة!

على اي حال نعود الى (لابلاس)؛ لنرى كيف اقام الاستقراء على اساس نظريته في الاحتمال، لنتذكر اولا تعريف (لابلاس) للاحتمال، حيث يذهب الى ان الاحتمال عبارة عن كسر بسطه مجموع الصور او الحالات المؤيدة للحادثة، ومقامه المجموع الكلي للحوادث الممكنة بالتساوي، واذا رمزنا للحالات المؤيدة بـ (م)؛ والى الحوادث الممكنة بـ (ن) يصبح لدينا: ح $= \frac{م}{ن}$.

على اساس هذا التعريف طرح (لابلاس) صيغتين، أفاد من احداهما تحديد قيمة احتمال التعميم الاستقرائي، كما افاد من الثانية تحديد قيمة احتمال تكرار الوقوع، وتقرر الصيغة الاولى ان قيمة احتمال التعميم $= \frac{م + ١}{ن + ١}$ ، وتقرر الصيغة الثانية ان قيمة احتمال تكرار وقوع الحادثة مرة اخرى $= \frac{م + ١}{م + ٢}$.

ولايضاح تطبيق هاتين الصيغتين نعود لنتذكر مثال الحقائب المتقدم، حيث كانت لدينا ثلاث حقائب تحتوي كل واحدة منها على خمس كرات، وكانت الحقيبه الاولى تحتوي على ثلاث كرات بيضاء، وتحتوي الحقيبة الثانية على اربع كرات بيضاء، بينما تحتوي الحقيبة الثالثة على خمس كرات بيضاء، فاذا اخترنا حقيبة من هذه الحقائب بشكل عشوائي، واستخرجنا منها ثلاث كرات فظهرت هذه الكرات جميعا بيضاء، فما هو احتمال ان تكون هذه الحقيبة هي الحقيبة التي تحتوي على كرات كلها بيضاء؟

والاجابة على هذا الاستفهام تحددها صيغة (لابلاس) الاولى:

$$\text{ح} = \frac{\text{م} + ١}{\text{ن} + ١} = \frac{٣ + ١}{٥ + ١} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣} .$$

وهي نفس القيمة الاحتماليه التي تم حسابها رياضيا ، والتي استنتجناها وفقا للتفسير الاجمالي للاحتمال.

واذا طرحنا السؤال الثاني على المثال المتقدم، وقلنا: ما هي قيمة احتمال ان تكون الكرة الرابعة بيضاء؟ فان الصيغة الثانيه التي طرحها (لابلاس) تحدد قيمة هذا الاحتمال كما يلي:

$\text{ح} = \frac{\text{م} + ١}{\text{م} + ٢} = \frac{٣ + ١}{٣ + ٢} = \frac{٤}{٥}$. وهذه القيمة الاحتمالية تطابق تماما القيمه التي تم تحديدها فيما سبق.

وحينما نقيس القيمه الاحتمالية التي تحددها صيغتي (لابلاس) للتعميم ولتكرار وقوع الحادثه ـ في مثال الحقائب ـ وفقا للتعريف الذي اختاره (لابلاس) للاحتمال نجد التطابق والانسجام واضحا، لان التعريف الكلاسيكي للاحتمال يقول:

$$\text{ح} = \frac{\text{عدد الحالات المؤيدة}}{\text{المجموع الكلي للحوادث الممكنة}}$$

ومن الواضح ان المجموع الكلي للحوادث الممكنة ـ كما تقدم بيان ذلك يساوي (١٥)، كما ان الحالات المؤيدة لكون الحقيبة هي الحقيبة، التي تحتوي على كرات كلها بيضاء يساوي (١٠) حالات، وهذا يعني ان :

ح = $\frac{١٠}{١٥}$ = $\frac{٢}{٣}$ ، والحال كذلك بالنسبة لاحتمال خروج الكرة الرابعة بيضاء، فهو يساوي (١٢) حالة مؤيدة ضمن خمس عشرة صورة ممكنة : = $\frac{١٢}{١٥}$ = $\frac{٤}{٥}$.

لكن صيغتي (لابلاس) لا يمكن ان تكونا اساسا لتقييم درجة الاحتمال في التعميمات الاستقرائية، وفي قياس احتمال التنبوء في وقوع الحوادث، ونستطيع ان نتبين ذلك من خلال المثال التالي:

لو كانت لدينا حقيبة تحتوى على خمس كرات، ولا نعلم شيئا عن لون اي كرة من هذه الكرات الخمسة، ثم سحبنا الكرة الاولى فخرجت بيضاء، وسحبنا الثانية فخرجت بيضاء، وسحبنا الثالثة فخرجت بيضاء، فما هي قيمة احتمال ان تكون هذه الحقيبة ذات كرات كلها بيضاء؟ وما هي قيمة احتمال ان تخرج الكرة الرابعة بيضاء؟ على اساس صيغة لابلاس :

($\frac{م + ١}{ن + ١}$) تكون قيمة احتمال ان الحقيبة تحتوي على كرات كلها بيضاء مساوية لـ $\frac{٣ + ١}{٥ + ١}$ = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$ ، كما تضحي قيمة احتمال ان تخرج الكرة الرابعة بيضاء على اساس صيغة لابلاس :

($\frac{م + ١}{م + ٢}$) مساوية لـ $\frac{٣ + ١}{٣ + ٢}$ = $\frac{٤}{٥}$.

الا ان صيغتي (لابلاس) خاطئتان في تحديد قيمة كلا الاحتمالين، بل تتعارضان حتى مع ذات التعريف الكلاسيكي للاحتمال؛ ولاجل ايضاح ذلك نلاحظ:

اننا بعد ان سحبنا ثلاث كرات من الحقيبة وظهرت انها بيضاء، تبقى امامنا كرتان، واذا كنا نعلم بان لون كل واحده من هاتين الكرتين يدور بين السواد والبياض تضحي امامنا اربع امكانيات ـ على ضوء التعريف الكلاسيكي ـ وهو عبارة عن:

١ـ ان تكون كلتا الكرتين بيضاوين.

٢ـ ان تكون كلتا الكرتين سوداويين.

٣ـ ان تكون الكرة الرابعة بيضاء.

٤ـ ان تكون الكرة الخامسة بيضاء.

وهنا نلاحظ ان عدد الحالات المؤيده لكون الحقيبة التي بايدينا تحتوي على كرات كلها بيضاء عباره عن حالة واحدة فقط من اربع حالات، ومن هنا تضحي قيمة احتمال كون الحقيبة تحتوي على كرات كلها بيضاء = $\frac{١}{٤}$. كما نلاحظ ايضا ان عدد الحالات التي تؤيد خروج الكرة الرابعة بيضاء عبارة عن حالتين من اربع حالات، وهذا يعني ان احتمال خروج الرابعة بيضاء = $\frac{١}{٢}$ ، وهذا التقييم لدرجة احتمال الحادثتين معاً ـ والذي تم وفق التعريف الكلاسيكي للاحتمال نفسه ـ مناقض بوضوح لتقييم درجة الاحتمالين في ضوء صيغتي (لابلاس).

ومن هنا صح القول بان صيغتي (لابلاس) لا يمكن اتخاذهما اساسا لتقييم درجة احتمال التعميم الاستقرائي ودرجة احتمال تكرار الوقوع.

تقويم (لابلاس) في ضوء التعريف الاجمالي:

نريد هنا ان نقوم طريقة (لابلاس) على اساس نظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي، لنرى السر في خطأ هذه الطريقة، وعدم قدرتها على تفسير الدليل الاستقرائي.

وهنا لابد ان نتذكر مثال الحقائب، حيث كانت لدينا ثلاث حقائب (أ، ب، ج)، وكانت (أ) تحتوي على ثلاث كرات بيضاء، و (ب) تحتوي على اربع كرات بيضاء، و (ج) تحتوي على خمس كرات بيضاء. سحبنا احدى الحقائب بشكل عشوائي، ثم استخرجنا منها ثلاث كرات، فتبين ان هذه الكرات كلها بيضاء، فما هو احتمال ان تكون هذه الحقيبة هي الحقيبة (ج)؟.

على اساس التفسير الاجمالي تبين لنا اننا امام علم اجمالي مؤلف من خمس عشرة صورة، وعشر صور من هذه الصور هي في صالح كون الحقيبة هي حقيبة (ج)، وهذا يعني ان ح «جـ» = $\frac{١٠}{١٥}$ = $\frac{٢}{٣}$.

امـا اذا كانت لدينا حقيبة (ن) ونحن لا نعرف عن لون كراتها الخمسة شيئا، ثم سحبنا منها ثلاث كرات فظهرت بيضاء، فهل تكون قيمة احتمال ان حقيبة (ن) تشبه حقيبة (جـ) = $\frac{٢}{٣}$ ؟

يصدق هذا الاحتمال اذا افترضنا اننا نمتلك في مثال حقيبة (ن) علما اجـماليا مؤلفا من خمسة عشر طرفا، او من اي عدد آخر، بحيث تكون الاطراف التي هي في صالح ان تشبه (ن) حقيبة (ج) بالنسبة الى المجموع الكلي لاطراف العلم الاجمالي = ($\frac{٢}{٣}$).

بينا نحن في مثال حقيبة (ن)، وبعد سحب ثلاث كرات بيضاء منها، سنواجه كرتين، ـ واذا افترضنا ان لون هاتين الكرتين مردد بين السواد والبياض ـ فسوف تكون عدد اطراف العلم الاجمالي اربعة:

١ـ ان تكون الكرة الرابعة بيضاء والخامسة سوداء.
٢ـ ان تكون الكرة الرابعة سوداء والخامسة بيضاء.
٣ـ ان تكون الكرة الرابعة بيضاء والخامسة بيضاء.
٤ـ ان تكون الكرة الرابعة سوداء والخامسة سوداء.

واذا اردنا قياس احتمال ان حقيبة (ن) شبيهة لحقيبة (آ) او (ب) او (جـ) فسوف يكون لدينا مايلي : ح ن هي (جـ) = $\frac{١}{٤}$ ، لان طرفا واحدا فقط في صالح ان تكون حقيبة (ن) ذات كرات كلها بيضاء.

ح ن هي (ب) = $\frac{٢}{٤}$.

ح ن هي (أ) = $\frac{١}{٤}$.

واذا اردنا ان نطبق حساب الاحتمالات مباشرة على قيمة الاحتمالات [(ح ن (جـ)، ح ن (ب)، ح ن (أ))] نلاحظ ما يلي:

ح ن (جـ) = ان تكون الكرة الرابعة بيضاء والخامسة بيضاء، وهذا يعني ان نضرب قيمة احتمال ان تكون الكرة الرابعة بيضاء وهو يساوي : ($\frac{١}{٢}$) في احتمال ان تكون الكرة الخامسة بيضاء وهو يساوي ($\frac{١}{٢}$)، وحينئذ يكون لدينا:

ح ن (جـ) = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$.

ح ن (ب) = ان تكون احدى الكرتين ـ على الاقل ـ بيضاء، اي ان تكون الكرة الرابعة بيضاء وان تكون الكرة الخامسة بيضاء، وهذا يعني تطبيق قاعدة الجمع، وحينئذ يكون لدينا:

$$\text{ح ن (ب)} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤}.$$

ح ن (أ) = ان تكون الرابعة سوداء، والخامسة سوداء $= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$.

الفقرة الثانية: الاستقراء ونظرية الاحتمال لدى الشهيد الصدر

اشـرنا في مطلع هذا الفصل الى نقطة خلاف مركزية بين مناطقة الاستقراء المعاصر، وعلى اساسها تنوعت اتجاهات البحث في تطبيق نظرية الاحتمال على الدليل الاستقرائي الى اتجاهين رئيسين:

الاول ـ ذهب الى ان الاستقراء تطبيق كامل لنظرية الاحتمال الرياضية، ولا حاجة بنا إلى افتراض مصادرة غير استقرائية.

الثـاني ـ ذهب الى عجـز الـدليل الاستقرائي عن تنمية احتمال التعميم، دون افتراض مصادرات غير استقرائية.

هناك اتجاه جديد يختلف عن كلا الاتجاهين المتقدمين، وهو الاتجاه الذي طرحه الاستاذ الفيلسوف السيد محمد باقر الصدر في كتابه (الاسس المنطقية للاستقراء)، ويؤكد هذا الاتجاه على ان الاستقراء حينما نطبق عليه نظرية الاحتمـال في تفسـيره الاجمـالي، قادر على رفـع احتـمال التعميم الاستقرائي، دون حاجة الى افتراض مصادرة العلية ـ كما اكد «راسل» على

ضرورة هذا الافتراض ـ وقد اكد الاتجاه الجديد على ان تطبيق نظرية الاحتمال على الدليل الاستقرائي يتم ضمن شكلين وطريقتين اساسيتين، تنمو فيهما قيمة احتمال الحادثة وفق سير استنباطي، اي: ان الدليل الاستقرائي يمنح الحادثة المستقرأة ـ في مختلف مراحله ـ قيمة احتمالية مستمدة من مباديء الاحتمال الرياضية وبديهياته التي تقدم ذكرها، في ضوء التفسير الاجمالي للاحتمال.

وقبل ان نعرض تفسير الشهيد الصدر للدليل الاستقرائي بشكليه علينا ان نقف عند نقطة رئيسية يتوقف هضم الاتجاه الجديد على الالمام بها:

مفهوم العلية:

ان دراسة مبدأ العلية، وما أثير حول موضوع العلية من مناقشات وافكار، وتقويم الاتجاهات المختلفة في هذا المجال، يستدعي بحثاً مستأنفاً، انما المهم هنا ان نتفهم الاطار والمرتكزات التي اعتمدها الشهيد الصدر في طرح هذا المفهوم، ثم نستوضح علاقة هذا الاطار وتلك المرتكزات بموضوع بحثنا (تطبيق نظرية الاحتمال على الدليل الاستقرائي).

للعلية مفهوم عريق راسخ في تاريخ الفلسفة، وهو المفهوم الذي تتبناه المدرسة العقليه، وقد تعرض هذا المفهوم لهجمات ـ على طول تاريخ الحكمة ـ لم تستطع رغم قوتها في بعض الاحيان ان تقوّض بناء العلية العقلي، واستمرت حياة العلية في مفهومها العقلي حتى العصر الحديث في حكمة الغرب، ولايزال فلاسفة الشرق ـ حتى الجيل المعاصر ـ متمسكين بضرورة هذا المفهوم وحيويته.

اما في حكمة الغرب فالموقف لا يسانخ ما عليه حكماء الشرق، ذلك ان ظهور النزعة التجريبية وسيادة الروح الحسيه على العقل الغربي في مطلع العصر الحديث وضعت مبدأ العلية في قفص الاتهام، واخذ هذا المفهوم المتألق عبر القرون سبيله نحو الأفول، حتى تعرض لاعنف هجوم على يد احد كبار فلاسفة التجريب (دافيد هيوم)، ثم لم يعد لهذا المبدأ ما كان له من رسوخ وثبات في افق العقل الغربي وفلسفة الغرب بشكل عام.

وفي المحصلة تبلور فهم جديد للعلية ـ مقابل الفهم العقلي ـ انتزع من مفهوم العلية التصورات العقلية التي أشبع بها، وطرح صياغة جديدة تنسجم مع معطيات الفكر التجريبي الجديد.

العلية العقلية:

يرجع مبدأ العلية ـ كما اشرنا ـ الى قضيتين رئيسيتين:

١ـ ان لكل حادثة سببا.

٢ـ ان الشيء ما لم يجب لم يوجد.

وتقرر القضية الاولى ضرورة وجود سبب لكل حادثة، اي ان الحادثة يستحيل وجودها ما لم يكن لها سبب، بينما تقرر القضية الثانية ان الحادثة لا توجد دون ان يكون بينها وبين السبب علاقة ضرورية، اي ان العلة التامة اذا وجدت لزم وجود المعلول بحكم ضرورة العقل، ومن ثم يستحيل تخلف المعلول عن علته التامة.

وينصب حكم العقليين في قاعدتهم المأثورة (ان الشيء ما لم يجب لم يوجد) على مفهوم الشيء، اي ان القاعدة العقلية تقرر قيام علاقة

الضرورة بين المفهومين، فالذي يتصف بوجوب الوجود عند قيام علته التامة هو مفهوم الشيء، ولا يقصرون هذه العلاقة بين المصاديق.

فحينما نقرر ان (كل حديد يتمدد بالحرارة) وان الحرارة علة تمدد الحديد انما نقيم علاقه ضرورية بين الحديد والحرارة، ولا ينصب الحكم في القضية على مصاديق الحديد (قطع الحديد) ومصاديق الحرارة.

ويطلق الاستاذ الشهيد مصطلح (السببية الوجودية) على القضية التي تقرر (ضرورة وجود المعلول عند وجود علته التامة) كما يطلق مصطلح (السببيه العدمية) على القضية التي تقرر استحالة الصدفة المطلقة. فنحن حينما نقرر (ان الشيء ما لم يجب لم يوجد) لا نستطيع ان نتجاوز المعطى المباشر لهذه القضية،ونقرر ان(عدم العلة علة لعدم المعلول)،اي ان اثبات العلاقة الضرورية بين العلة والمعلول لا يثبت استحالة وجود المعلول بلا علة.

ومن هنا نستخلص ان السببيه الوجودية بالمفهوم العقلي لا تنفي امكان الصدفه المطلقة، بينما تعادل السببية العدمية بالمفهوم العقلي استحالة الصدفة المطلقة، ويمكن ان نستخدم لغة المنطق الصوري، فنقول ان السببية الوجودية اعم من السببية العدمية.

العلية التجريبية:

السببية الوجودية بالمفهوم العقلي هي هدف الهجوم التجريبي على مبدأ العلية. فالعلية العقلية تتضمن مفهوم (الضرورة) والضرورة ليست امرا يمكن التاكد منه تجريبيا، بل هي علاقة مدركة ادراكا عقليا خالصا دون ان

يكون لها سند حسي، يمكن ان نستدل به وانسجاما مع اساس المذهب التجريبي الذي يُرْجِع المعرفة البشرية باسرها الى التجربة والواقع الحسي، تفتقد (الضرورة) سندها وقضية التعميم القائل:

(ان الحديد يتمدد بالحرارة) لا تتعدى كوننا لاحظنا ان الحديد حينما نسلط عليه الحرارة يتمدد باطراد.

من هنا تضحي قضية سببية («أ» لـ «ب») مجرد اقتران مطرد بين («أ» و «ب») دون ان تتضمن اي ضرورة ولـزوم. فعلاقة السببية لا تتعدى علاقة اقتران مطرد بين ما نسميه سببا وما نسميه مسببا.

وتأسيسا على هذا المفهوم التجريبي للسببية يرى الشهيد الصدر:

(ومن الواضح ان رفض فكرة الضرورة واللزوم نهائيا يؤدي الى ان وجود اي حادثه يعتبر صدفه مطلقه دائما (لان الصدفة هي نفي اللزوم ـ كما عرفنا في القسم الاول من بحوث هذا الكتاب ـ، وان اي حادثة توجد عقيب حادثة اخرى فوجودها عقيبها صدفة ولا يعبر عن اي لزوم، فالغليان عقيب الحرارة، والحرارة عقيب الحركة صدفة، كما ان نزول المطر عقيب صلاتك صدفة، والفارق بين الصدفتين: ان الاولى تتكرر على سبيل الصدفة بصورة مطردة، وان الثانية لا توجد الا احيانا

وما دام هذا التتابع مجرد صدفة مطردة، دون ان يقوم على اساس علاقــة ضرورة بين مفهـومين، فهو يعبر عن علاقة بين فردين بدلا عن مفهومين وبهذا يكون التتابع بين كل فرد من الحرارة وفرد من الحركة علاقة مستقلة نشأت على سبيل الصدفة بين الفردين، فسببية الحركة للحرارة ـ بالمفهـوم التجـريبي ـ تعبر عن علاقات كثيرة بعدد ما يوجد من افراد

للحرارة والحركة، دون ان تستقطب كل تلك العلاقات علاقة رئيسية بين المفهومين كما يفترضه المفهوم العقلي للسببية)[١].

يستنتج في هذا الضوء ان السببية الوجودية في المفهوم التجريبي تتناقض مع السببية العدمية في المفهوم العقلي، اذ تقرر السببية العدمية في المفهوم العقلي استحالة الصدفة المطلقة، بينما يفضي المفهوم التجريبي للسببية الى الاذعان بامكان الصدفة المطلقة.

ايضاح وتلخيص :

اتضح لنا ـ في ضوء ماتقدم ـ ان مفهوم العلية تتنازع حوله نظريتان اساسيتان، تعتقد الاولى ان العلية مفهوم من المفاهيم العقلية، اي التي يدركها العقل البشري بداهة، وترى ان العلاقة بين وجود المعلول ووجود العلة، وبالعكس تنطوي على مفهوم فوق التجربة، وهو مفهوم «الضرورة واللزوم»، اي: ان وجود المسبب يقتضي وجود السبب بالضرورة كما يقتضي وجـود السبب وجود المسبب بالضرورة. وقد اصطلح الباحثون على هذه النظرية «النظرية العقلية» او «العلية العقلية».

اما النظرية الثانية فهي ما تتبناه «المدرسة التجريبية»، التي تذهب الى ان المعرفه البشرية باسرها ترتد الى الحس والتجربة. وترى «المدرسة التجريبية» ان الحس والتجربة لا يزودها بمفهوم اللزوم والضرورة. انما نرى في ضوء التجارب المتكررة: ان الظاهرة التي يطلق عليها المعلول تحدث بشكل مطرد عقيب، او بصحبة الظاهرة، التي يطلق عليها العلة. ومن

---

(١) الاسس المنطقية للاستقراء، ص ٢٥٧.

هنا فالعلية لا تعني سوى اطراد مستمر لاقتران العلة والمعلول.

وهنا ارى من الضروري ان نوضح بشكل اكبر العلاقات القائمة بين القضايا المستنتجة في ضوء كلا النظريتين:

العلية العقلية تقرر القضيتين التاليتين:

١ـ ان لكل حادثة سببا بالضرورة.

٢ـ ان المسبب يوجد عند وجود السبب بالضرورة.

نأخذ القضية الاولى: «ان لكل حادثة سببا بحكم ضرورة العقل». تعني هذه القضية ان اي حادثة لابد ان يكون لها سبب، ومن ثم يستبعد العقل نهائياً وجود حادثة بلا سبب، وهذا يعني ان العقل يقرر: استحاله وجود حادثة بلا سبب، اي استحالة الصدفة المطلقة.

∴ القضية (١) = استحالة الصدفة المطلقة.

استحالة الصدفة المطلقة تعني ان العقل يستبعد نهائيا وجود المسبب عند عدم السبب، ومن هنا يحكم العقل بان: عدم السبب يثبت بحكم ضرورة العقل عدم السبب، وعلى هذا الاساس يستنتج «الاسس المنطقية للاستقراء» ان:

استحالة الصدفة المطلقه = عدم السبب علة لعدم المسبب.

فاذا كانت لدينا حادثة، نرمز لها بـ «ب»، فسوف نستدل بوقوعها على وقوع سببها، لاستحالة وقوعها بلا سبب، وحينما يكون سببها محصورا في «أ»، اي لانحتمل سببا لـ «ب» سوى «أ»، فسوف نستدل استدلالا ضروريا (اي يقوم على اساس استحاله اجتماع النقيضين)، على وجود «أ».

اما اذا كنا نحتمل لـ «ب» اسبابا مضافا الى «أ» كـ «ت»، فسوف يكون وقوع «ب» دليلا على وقوع احد الاسباب، التي تقف خلف «ب». وعلى اساس مبدأ استحالة الصدفة المطلقة يتم بناء احد اقسام البرهان في المنطق الارسطي، فعلى اساس هذا المبدأ ـ يمكننا ان نجعل المعلول واسطة لاثبات وجود العلة، وهذا الاثبات يسمى في المنطق الارسطي «البرهان الانّي».

لنأخذ القضية الثانية «ان المسبب يوجد بالضرورة عند وجود السبب». نلاحظ ان هذه القضية تقرر علاقه ضرورية بين السبب والمسبب، فاذا كان لدينا «أ» كسبب، و «ب» كمسبب، نستدل بوجود «أ» على وجود «ب»، لوجوب وجود المعلول عند تحقق علته التامة. وعلى هذا الاساس يتم بناء «البرهان اللمّي» في منطق ارسطو.

لنلاحظ العلاقة بين قضيتي السببية العقلية، نجد ان كلا منهما لا تقرر الاخرى، ولا تنفيها، اي تحكمهما على مستوى التصديق ـ لا على مستوى الواقع من وجهة نظر ارسطو ـ علاقه العموم والخصوص من وجه. اي اننا اذا اخذنا القضية الاولى بمفردها فسوف تكون حيادية امام صدق او كذب الثانية، واذا اخذنا الثانية وحدها سوف تكون حيادية ايضا امام صدق الاولى.

يبقى ان نلاحظ العليه بمفهومها التجريبي، حيث نجدها تجرد السببية من كل مفهوم عقلي، وعلى اساس ما طرحه الاستاذ الصدر من استنتاج، تصبح العلاقة التي تقررها العلية التجريبيه علاقة بين مصاديق ومفردات، ومن ثم يكون اقتران «أ» و «ب» في كل تجربة ناشئاً صدفة، دون

اي ضرورة تحكمه.

وعلى هذا الاساس سوف تكون العلية التجريبية مناقضة للسببية العقلية بكلا مفهوميها، اي انها كما تقرر عدم وجود اي ضرورة بين وجود «أ» و «ب»، تقرر ايضا امكان وجود «ب» بلا «أ»، اي انها تعادل امكان الصدفة المطلقة.

الشكل الاول للمرحلة الاستنباطية:

اشرنا الى ان الدليل الاستقرائي وفق نظرية الاحتمال وعلى اساسها يسير سيرا استنباطيا، فتكون نتائج الدليل الاستقرائي والقيم الاحتمالية، التي يمنحها للتعميم الاستقرائي مستخلصة استخلاصا استنباطيا من مقدماتها.

واشرنا ايضا الى ان الدليل الاستقرائي ـ لدى الشهيد الصدر يمكنه ان ينمّي قيمة احتمال التعميم، بوصفه تطبيقا خالصا لنظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي، اي اننا على اساس نظرية الاحتمال المتقدمة نستطيع ان نسير بالدليل الاستقرائي سيرا استنباطيا منطقيا، دون حاجة الى اضافة مبادىء ومصادرات غير استقرائية. بل نظرية الاحتمال ببديهياتها المتقدمة فقط تفي بالدور المطلوب.

اي: اننا لسنا بحاجة الى مصادرات العلية، التي افترض ضرورتها (راسل)، وسنثبت في هذا الشكل للمرحلة الاستنباطية ان مجرد الشك في صحة العلية كافٍ؛ لكي يمارس الدليل الاستقرائي دوره في رفع قيمة الاحتمال على اساس نظرية الاحتمال المتقدمة.

وبغية التريث في استخلاص النتائج النهائية التي تترتب على طريقة الاستاذ في تطبيق نظرية الاحتمال على الدليل الاستقرائي، نوضح ما هو صانع في الشكل الاول للمرحلة الاستنباطية:

نحاول في هذا الشكل ان ننمّي قيمة التعميم الاستقرائي القائل (كل آ ب) وليس بايدينا الاّ نظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي، وسوف ننطلق من اربعة منطلقات مختلفة، نستخدم في كل واحد منها سلاحنا (نظريه الاحتمال)؛ لنرى مدى فعالية هذا السلاح.

ننطلق من اربعة مبادىء مختلفة ضمن اربعة تطبيقات لنظريه الاحتمال على الدليل الاستقرائي، ففي التطبيق الاول نبتدأ من افتراض صدق القضية، التي تقرر (استحالة وجود حادثة بلا سبب)، مضافا الى الشك في صدق القضية، التي تقرر ان العلاقة بين السبب والمسبب هي الضرورة واللزوم.

اما في التطبيق الثاني فسوف نبدأ من الشك في كلتا القضيتين، اي الشك في صدق القضية التي تقرر استحالة وجود حادثة بلا سبب، والشك في صدق القضية التي تقرر السببية الوجودية بمفهومها العقلي.

ونبدأ في التطبيق الثالث من الشك في صدق السببية الوجوديه في مفهومها العقلي، والتصديق بكذب السببية العدمية في مفهومها العقلي، اي: اننا نؤمن بامكان وجود حادثة بلا سبب، كما نشك بان العلاقة بين السبب والمسبب هي علاقة الضرورة، ولا ندري هل هي علاقة الضرورة واللزوم، ام انها مجرد التتابع والاقتران المطرد.

اما في التطبيق الرابع فسوف ننطلق من بداية جديدة، تختلف عن البدايات التي انطلقنا منها في التطبيقات المتقدمة، حيث سوف نبدأ من افتراض التصديق بكذب السببية الوجودية بمفهومها العقلي، اي سنفترض الدليل على ان ليس هناك اي ضرورة في العلاقة بين العلة والمعلول.

وقبل البدء بعرض هذه التطبيقات المختلفة نود الاشارة الى حقيقة هامة جدا، وهي ان المذهب التجريبي لا يستطيع اقامة برهان او تجربة على نفي (الضرورة واللزوم) بل غاية ما يفترضه هذا المذهب هو ان (الضرورة واللزوم) معطى قبلي، لا يمكن اثباته تجريبيا، اي: ان الفيلسوف التجريبي يبقى شاكا في صدق السببية الوجودية في المفهوم العقلي، لان نفيها كاثباتها ليس امرا متيسرا للتجربة الحسية.

التطبيق الاول:

ننطلق في هذا التطبيق من الايمان باستحالة الصدفة المطلقة، والشك في ان العلاقة بين (أ) و (ب) هي علاقة الضرورة واللزوم، فاذا رمزنا بـ (ب) الى تمدد الحديد، و (أ) الى تسليط الحرارة على الحديد فسوف يكون لدينا ما يلي:

١ـ ان (ب) لابد لها من سبب لانها حادثة، ولكل حادثة سبب.

٢ـ ان سبب (ب) اما ان يكون (أ) او غيره من المحتملات.

نريد هنا ان نثبت التعميم الاستقرائي (كل أ يعقبها ب) من خلال اثبات ان (أ) علة (ب) بالمفهوم العقلي للسببية الوجودية؛ اذ السببية

الوجودية العقلية اعم من السببية الوجودية التجريبية، وقد افترضنا بدءً ان السببية الوجودية العقلية امر مشكوك فيه، اي: ليس لدينا دليل على كذبها او صدقها، فتبقى محتملة بدرجة $\frac{1}{2}$.

نأخـذ بتجـربـة الفرض ـ وتسهيلا لحساب قيمة احتمال التعميم نفترض ايضا ان ما يحتمل سببا لـ (ب) مما عدا (أ) هو (ت) فقط، وبهذا يكون لدينا علم اجمالي قبلي بان سبب (ب) اما ان يكون (أ) او (ت). فاذا سلطنا الحرارة على الحديد مرة واحدة فشاهدنا تمدد الحديد، فسوف نبقى مع علمنا الاجمالي الاول، اي ان (أ) اما ان يكون سبب (ب) واما ان يكون (ت) هو السبب، لان اقتران (أ) و (ب) في التجربة الاولى يمكن ان يفسر على اساس سببيه (أ) لـ (ب)، كما يمكن ان يفسر على اساس ان هذا الاقتران حصل صدفة، وان (ت) هو السبب، لكننا لم نشاهده.

واذا قمنا بتجربة ثانية، ولاحظنا ايضا اقتران (أ) و (ب) فلا يمكننا ان نفسر هذا الاقتران لصالح سببية (أ) لـ (ب)؛ لانه صالح لان يُفسر ايضا على اساس الاقتران التصادفي.

لكن هناك علمًا اجمالياً يمكن على اساسه ان ننمّي احتمال سببية (أ) لـ (ب) بعد تجربتين ناجحتين، حيث اننا سوف نعلم بوقوع احدى الحوادث التالية:

١ـ ان (ت) حدثت مع التجربة الاولى فقط.

٢ـ ان (ت) حدثت مع التجربة الثانية فقط.

٣ـ ان (ت) حدثت مع التجربة الاولى والثانية.

٤ـ ان (ت) لم تحدث مع كلتا التجربتين .

وما دمنا نعلم ـ على اساس الموقف القبلي ـ ان (ب) لابد لها من سبب، وهو اما (أ) او (ت) نلاحظ ان الطرف الاول والثاني والرابع من اطراف العلم الاجمالي المتقدمة في صالح سببية (أ لـ ب)، لان هذه الاطراف تفترض غياب (ت) في تجربة واحدة على الاقل، وهذا الافتراض يتناقض مع سببية (ت لـ ب)، وبالطبع سوف تكون مؤيدة لسببية (أ) لـ (ب)، اما الطرف الثالث فهو يتلائم مع سببية (أ)، كما يتلائم مع سببية (ت) فهو حيادي، وهذا يعني ان نصف قيمته الاحتمالية لصالح سببية (أ)، ونصفها الاخر لصالح سببية (ب).

من هنا نستنتج ان احتمال سببيه (أ) بعد تجربتين ناجحتين سوف يكون $\frac{\frac{١}{٢}\,٣}{٤} = \frac{٧}{٨}$.

ولكن اذا طبقنا مبدأ الاحتمال العكسي على احتمال السببية بعد تجربتين ناجحتين، فسوف تكون الحادثة التي يراد قياس درجة احتمالها عبارة عن: سببية (أ) لـ (ب) على تقدير اقتران (ب) بـ (أ) في تجربتين، ولنرمز الى احتمال سببية (أ) لـ (ب) بـ (ح ك)، ولاحتمال اقتران (ب) بـ (أ) بـ (ح ل)، فسوف تكون لدينا المعادلة التالية:

$$ح\,ك.\,ل = \frac{ح.ك \times ح\,ل.\,ك}{ح\,ل} \;.$$

وحيث ان ح ك = $\frac{١}{٢}$.

وان ح ل. ك = ١، لان احتمال اقتران (ب) بـ (أ) على تقدير سببية (أ) لـ (ب) حادثة مؤكدة.

و (ح ل) يعني احتمال اقتران (ب) بـ (أ) قبل التجربة، وهو يعني وقـوع احدى حادثتين: اقتران (ب) بـ (أ) حال سببية (أ) لـ (ب)، او اقتران (ب) بـ (أ) حال سببية (ت) لـ (ب)، وهذا يعني ان نطبق قاعدة الجمع فلكي نعرف قيمة (ح ل) علينا ان نجمع بين احتمال اقتران (ب) بـ (أ) حال سببية (أ) لـ (ب) واحتمال اقتران (ب) بـ (أ) حال سببية (ت) لـ (ب).

ولكن ما هي قيمة احتمال اقتران (ب) بـ (أ) حال سببية (أ) لـ (ب)؟ وهـذا الاحتمال مركب من احتمالين، لان الحادثة حادثة مركبة، اذ اقتران (ب) بـ (أ) حال سببية (أ) لـ (ب) تعني وقوع حادثتين معا، وهما سببيه (أ) لـ (ب) واقتران (ب) بـ (أ)، وفي مثل هذه الحالة لابد من تطبيق قاعدة الضرب (بديهية الاتصال)، فنضرب احتمال سببية (أ) لـ (ب) في احتمال اقتران (ب) بـ (أ) على تقدير سببية (أ) لـ (ب) ، وهو يساوي $\frac{1}{2} \times 1$.

وقيمة احتمال اقتران (ب) بـ (أ) حال سببية (ت) لـ (ب) تعني وقوع حادثتين ايضا، وهما سببية (ت) لـ (ب)، واقتران (أ) بـ (ب) معا، ولابد من الضرب ايضا بين قيمة احتمال سببية (ت) لـ (ب) في قيمة احتمال اقتران (أ) بـ (ب) على تقدير سببية (ت) لـ (ب)، واحتمال سببية (ت) لـ (ب) = $\frac{1}{2}$ ،اما احتمال اقتران (أ) بـ (ب) على تقدير سببية (ت) لـ (ب) فهـو يعني وقوع حادثتين معا، وهما اقتران (أ) و (ب) في التجربة الاولى، واقتران (أ) و (ب) في التجربة الثانية، واحتمال اقتران (أ) و (ب)

في التجربة الاولى = $\frac{١}{٢}$ ، واحتمال اقتران (أ) و (ب) في التجربة الثانية = $\frac{١}{٢}$.

اذن! احتمال اقتران (أ) بـ (ب) على تقدير سببية (ت) لـ (ب) = $\frac{١}{٤}$

نعود الى اصل المعادلة المطلوبة:

$$ح\ ك.\ ل = \frac{ح\ ك \times ح\ ل.\ ك}{ح\ ل}$$

$$= \frac{\frac{١}{٢} \times ١}{\frac{١}{٢} \times ١ + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤}} = \frac{\frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٨}} = \frac{١}{٢} \times \frac{٨}{٥} = \frac{٤}{٥}$$

يتضح ان هناك تفاوتا واضحا بين القيمة الاحتمالية التي حددناهاعلى اساس العلم الاجمالي الرباعي (الذي يستوعب محتملات ت) وبين القيمة الاحتمالية التي حددها مبدأ الاحتمال العكسي، فقد كانت القيمة الاحتمالية للتعميم وفق العلم الاجمالي الرباعي = $\frac{٧}{٨}$ ، وكانت القيمة الاحتمالية للتعميم على اساس مبدأ الاحتمال العكسي = $\frac{٤}{٥}$.

السر في هذا التفاوت يكمن في اننا حينما نحدد قيمة احتمال التعميم على اساس العلم الاجمالي الرباعي فهذا يعني الغاء العلم الاجمالي القبلي،

الذي يمنح احتمال سببية (أ) قيمة $\frac{١}{٢}$ ، واحتمال سببية (ت) قيمة $\frac{١}{٢}$ ايضا، بينا يأخذ مبدأ الاحتمال العكسي في حسابه القيمه القبلية، ويعتمد في تقييم درجة احتمال الحادثة على اساس قاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية.

ايضاح ذلك:

كان لدينا علم اجمالي قبل التجربة (العلم ١) وهو عبارة عن سببية (أ) او (ت) لـ (ب)، وهو علم اجمالي مؤلف من طرفين، وبموجب هذا العلم الاجمالي تكون قيمة احتمال سببية (أ) لـ (ب)= $\frac{١}{٢}$ ، واحتمال سببية (ت) = $\frac{١}{٢}$.

ولكن بعد اجراء تجربتين ناجحتين يحصل لنا علم اجمالي جديد مؤلف من اربعة اطراف ـ كما تقدم ـ وهذا العلم الاجمالي(العلم ٢)علم اجمالي بعدي،فاذا اردناتقويم درجة احتمال الحادثة على اساس (قاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية) فلا بد من ضرب مجموعة اطراف العلم الاول في مجموعة اطراف العلم الثاني، ونفرز الصور غير المحتملة ونقيم درجة احتمال الحوادث على اساس العلم الاجمالي الثالث فنقول: اننا بعد اجراء تجربتين ناجحتين سنكون امام علم اجمالي مؤلف من الاطراف التالية:

١ـ ان تكون (أ) هي السبب و (ت) موجودة مع التجربة الاولى فقط.

٢ـ ان تكون (أ) هي السبب و (ت) موجودة مع التجربة الثانية فقط.

٣ـ ان تكون (أ) هي السبب و (ت) موجودة مع التجربتين.

٤ـ ان تكون (أ) هي السبب و (ت) غير موجودة مع التجربتين.

٥ـ ان تكون (ت) هي السبب و (ت) موجودة مع التجربة الاولى فقط.

٦ـ ان تكون (ت) هي السبب و (ت) موجودة مع التجربة الثانية فقط.

٧ـ ان تكون (ت) هي السبب و (ت) موجودة مع التجربتين.

٨ـ ان تكون (ت) هي السبب و (ت) غير موجودة مع التجربتين.

وحيث ان الاطراف الخامس والسادس والثامن غير محتملة؛ اذ لا يحتمل ان تكون (ت) هي السبب وهي غير موجودة في اي من التجربتين، فهذا يعني اننا امام علم اجمالي مؤلف من خمسة اطراف، واربعة اطراف منه في صالح سببية (أ) لـ (ب)، اي لصالح التعميم الاستقرائي وطرف واحد منه لصالح سببية (ت).

اذن! احتمال التعميم = $\frac{٤}{٥}$.

وهكذا يتضح ان مبدأ الاحتمال العكسي يُقيِّم درجة احتمال الحادثة على اساس (العلم الاجمالي ٣)، الذي هو نتيجة ضرب (العلم الاجمالي١) في (العلم الاجمالي ٢) وفرز الصور غير المحتملة، اي: ان مبدأ الاحتمال العكسي يعتمد على قاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية.

صيغتا الصدر:

طرح الشهيد الصدر صيغتين لتحديد قيمة احتمال التعميم على اساس قاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية، وتفترض الصيغتان:

ح = احتمال التعميم.
ع ١ ن = عدد اعضاء العلم الاجمالي الاول.
ع ٢ ن = عدد اعضاء العلم الاجمالي الثاني.
ع ٣ ن = عدد اعضاء العلم الاجمالي الثالث.
ن = عدد التجارب الناجحة.

الصيغة الاولى: $\text{ح} = \frac{\text{ع}^{٢}\,\text{ن}}{\text{ع}^{٣}\,\text{ن}}$

الصيغة الثانية: $\text{ح} = \frac{٢^{\text{ن}}}{٢^{\text{ن}} + (\text{ع}^{١}\,\text{ن} - ١)}$

تفسير الصيغة الاولى:

$\text{ح} = \frac{\text{ع}^{٢}\,\text{ن}}{\text{ع}^{٣}\,\text{ن}}$ ، اي ان احتمال التعميم ـ وفقا لقاعدة الضرب ـ عدد اعضاء العلم الاجمالي الثاني مقسوما على عدد اعضاء العلم الاجمالي الثالث، ولاجل ايضاح البرهان على هذه الصيغة، نطرح مثالين لقاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية:

المثال الاول:

لدينا (ب) معلول، ولدينا (أ) او (ت)،كعلة وسبب، واجرينا ثلاث تجارب ناجحة على (أ) و (ب)، حينئذ ستكون لدينا العلوم الاجمالية التالية:

العلم الاجمالي الاول، وهو ان سبب (ب) اما ان يكون (أ)، واما ان يكون (ت)، وهذا العلم الاجمالي مؤلف من طرفين.

العلم الاجمالي الثاني، وسوف يتألف من الاطراف التالية:

١ـ ان (ت) حصل مع التجربة الاولى فقط.

٢ـ ان (ت) حصل مع التجربة الثانية فقط.

٣ـ ان (ت) حصل مع التجربة الثالثة فقط.

٤ـ ان (ت) حصل مع التجربة الاولى والثانية.

٥ـ ان (ت) حصل مع التجربة الاولى والثالثة.

٦ـ ان (ت) حصل مع التجربة الثانية والثالثة.

٧ـ ان (ت) حصل مع التجربة الاولى والثانية والثالثة.

٨ـ ان (ت) لم يحصل في كل التجارب الثلاثة.

وحينما نضرب العلم الاول في الثاني نحصل على العلم الاجمالي الثالث، وهو مؤلف من الاطراف التالية:

١ـ ان يكون (أ) سبباً لـ (ب)، و (ت) حصل مع التجربة الاولى فقط.

٢ـ ان يكون (أ) سبباً لـ (ب)، و (ت) حصل مع التجربة الثانية فقط.

٣ـ ان يكون (أ) سبباً لـ (ب)، و (ت) حصل مع التجربة الثالثة فقط.

٤ـ ان يكون (أ) سبباً لـ (ب)، و (ت) حصل مع التجربة الاولى والثانية.

٥ـ ان يكون (أ) سبباً لـ (ب)، و (ت) حصل مع التجربة الاولى والثالثة.

٦ـ ان يكون (أ) سبباً لـ (ب)، و (ت) حصل مع التجربة الثانية والثالثة.

٧ـ ان يكون (أ) سبباً لـ (ب)، و (ت) حصل مع التجربة الاولى والثانية والثالثة.

٨ـ ان يكون (أ) سبباً لـ (ب)، و (ت) لم يحصل مع كل التجارب الثلاثة.

ان يكون (ت) سبباً لـ (ب)، و (ت) حصل مع التجربة الاولى فقط.

ان يكون (ت) سبباً لـ (ب)، و (ت) حصل مع التجربة الثانية فقط.

ان يكون (ت) سبباً لـ (ب)، و (ت) حصل مع التجربة الثالثة فقط.

ان يكون (ت) سبباً لـ (ب)، و (ت) حصل مع التجربة الاولى والثانية فقط.

ان يكون (ت) سبباً لـ (ب)، و (ت) حصل مع التجربة الاولى والثالثة فقط.

ان يكون (ت) سبباً لـ (ب)، و (ت) حصل مع التجربة الثانية والثالثة فقط.

٩ـ ان يكون (ت) سبباً لـ (ب) و (ت) حصل مع التجربة الاولى والثانية والثالثة.

ان يكون (ت) سبباً لـ (ب) و (ت) لم يحصل مع كل التجارب الثلاثة.

ومن الواضح ان (العلم ٣) يتألف من تسعة اطراف، لان الصور السبعة، التي لم نعطها رقما في الجدول صور غير محتملة؛ اذ لا يعقل سببية (ت) وعدم وجوده في تجربة من التجارب الثلاثة.

وسوف تكون قيمة احتمال التعميم على اساس العلم الاجمالي الثالث، اي قيمة احتمال سببية (أ) لـ (ب) بعد ثلاث تجارب ناجحة على اساس قاعدة الضرب، وعلى اساس مبدأ الاحتمال العكسي مساوية لـ = $\frac{٨}{٩}$.

اما على الاحتمال العكسي فهي $\frac{\frac{١}{٢} \times ١}{\frac{١}{٢} \times ١ + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٨}} = \frac{١}{٢} \times$

$\frac{١٦}{٩} = \frac{٨}{٩}$.

وعلى اساس قاعدة الضرب، فان ح =

$$\frac{\text{عدد المراكز التي تحتلها الحادثة}}{\text{مجموعة اطراف العلم الاجمالي}}$$ ، وحيث ان مجموعة اطراف العلم

الاجمالي = ٩ ، وتحتل سببية (أ) لـ (ب) ثمانية مراكز منها، اذن! ح = $\frac{٨}{٩}$ ،

وهذه القيمة لاحتمال التعميم = $\frac{\text{عدد اعضاء العلم الاجمالي الثاني}}{\text{عدد اعضاء العلم الاجمالي الثالث}}$

$$= \frac{ع^{٢} ن}{ع^{٣} ن}$$

المثال الثاني:

لدينا (ب) معلول، ولدينا (أ)، (ت)، (جـ)، (د)، (هـ) كاسباب وعلل، واجرينا تجربتين ناجحتين، حينئذ ستكون لدينا العلوم الاجمالية التالية:

العلم الاجمالي الاول، وهو مؤلف من خمسة اطراف، وهي عبارة عن احتمالات السببية:

١ـ اما ان يكون (أ) سبباً لـ (ب).
٢ـ اما ان يكون (ت) سبباً لـ (ب).
٣ـ اما ان يكون (جـ) سبباً لـ (ب).
٤ـ اما ان يكون (د) سبباً لـ (ب).
٥ـ اما ان يكون (هـ) سبباً لـ (ب).

العلم الاجمالي الثاني، وهو مؤلف من الاطراف التالية:

١ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، و (د) في الاولى و (هـ) في الاولى.

٢ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، و (د) في الاولى و (هـ) في الثانية.

٣ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، و (د) في الاولى و (هـ)في الاولى والثانية.

٤ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، و (د) في الاولى ولاتحدث (هـ) في كلتا التجربتين.

٥ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، و (د) في الثانية و(هـ) في الاولى.

٦ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، و (د) في الثانية و (هـ) في الثانية.

٧ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، و (د) الثانية و (هـ) في الاولى والثانية.

٨ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، و (د) في الثانية ولاتحدث (هـ) في التجربتين.

٩ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، و (د) في الاولى و الثانية و (هـ) في الاولى.

١٠ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، و (د) في الاولى والثانية و (هـ) في الثانية.

١١ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، و (د) في الاولى والثانية و (هـ) في الاولى والثانية.

١٢ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، و (د) في الاولى والثانية ولاتحدث (هـ) في التجربتين.

١٣ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، ولاتحدث (د) في كلتا التجربتين و (هـ) في الاولى.

١٤ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، ولاتحدث (د) في كلتاالتجربتين و (هـ) الثانية.

١٥ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، ولاتحدث (د) في كلتاالتجربتين و (هـ) في الاولى والثانية.

١٦ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى، و (جـ) في الاولى، ولاتحدث (د) في كلتاالتجربتين ولاتحدث (هـ) في التجربتين.

١٧ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثانية، (د) في الاولى، (هـ) في الاولى.

١٨ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثانية، (د) في الاولى، (هـ) في الثانية.

١٩ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثانية، (د) في الاولى، (هـ) في الاولى والثانية.

٢٠ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثـانية، (د) في الاولى، ولاتحدث (هـ) في كلتا التجربتين.

٢١ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثانية، (د) في الثانية، (هـ) في الاولى.

٢٢ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثانية، (د) في الثانية، (هـ) في الثانية.

٢٣ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثانية، (د) في االثانية، (هـ) في الاولى والثانية.

٢٤ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثـانية، (د) في الثانية، لاتحدث (هـ) في كلتا التجر بتين.

٢ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثـانية، (د) في الاولى والثانية، (هـ) في الاولى .

٢٦ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثانية، (د) في الاولى والثانية ، (هـ) في الثانية.

٢٧ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثـانية، (د) في الاولى والثانية، (هـ) في الاولى والثانية.

٢٨ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثـانية، (د) في الاولى والثانية لاتحدث (هـ) في كلتا التجر بتين.

٢٩ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثانية، لاتحدث (د) في كلتا التجر بتين، (هـ) في الاولى.

٣٠ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثانية، لاتحدث (د) في كلتا التجر بتين(هـ) في االثانية.

٣١ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثانية، لاتحدث (د) في كلتا التجر بتين ، (هـ) في الاولى والثانية.

٣٢ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الثانبة، لا تحدث (د) في كلتا التجر بتين، لا تحدث (هـ) في كلتا التجر بتين.

٣٣ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في االاولى والثانية، (د) في الاولى، (هـ)في الاولى.

٣٤ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الاولى والثـانية، (د) في الاولى، (هـ) في الثانية.

٤٨ـ ان تحدث (ت) في الاولى، (جـ) في الاولى والثانية، لا تحدث (د) في كلتا التجربتين، لا تحدث (هـ) في كلتا التجربتين.

٤٩ـ ان تحدث (ت) في الاولى، ولا تحدث (ج) في كلتا التجربتين، و (د) في الاولى، (هـ) في الاولى.

٦٤ـ ان تحدث (ت) في الاولى، ولا تحدث (جـ) في التجربتين، لا تحدث (د) في التجربتين، لا تحدث (هـ) في التجربتين.

٦٥ـ ان تحدث (ت) في الثانية، (جـ) في الاولى، (د) في الاولى، (هـ) في الاولى.

....

٨٠ـ ان تحدث (ت) في الثانية، (جـ) في الاولى،(د) فيالتجربتين، لا تحدث (هـ) في التجربتين.

٨١ـ ان تحدث (ت) في الثانية، (جـ) في الثانية، (د) في الاولى، (هـ) في الاولى.

٩٦ـ ان تحدث (ت) في الثانية، (جـ) في الثانية، لا تحدث (د) في التجربتين، لا تحدث (هـ) في التجربتين.

٩٧ـ ان تحدث (ت) في الثـانية، (جـ) في الاولى والثانية، (د) في الاولى، (هـ) في الاولى.

١١٢ـ ان تحدث (ت) في الثانية، (جـ) في الاولى والثانية، لا تحدث (د) في التجربتين، لا تحدث (هـ) في التجربتين.

١١٣ـ ان تحدث (ت) في الثانية، لا تحدث (جـ) في التجربتين، (د) في الاولى، (هـ) في الاولى.

١٢٨ـ ان تحدث (ت) في الثانية، لا تحدث (جـ) في التجربتين، لا تحدث (د) في التجربتين، لا تحدث (هـ) في التجربتين.

١٢٩ـ ان تحدث (ت) في التجربة الاولى والثانية، (جـ) في الاولى، (د) في الاولى، (هـ) في الاولى.

١٤٤ـ ان تحدث (ت) في التجربتين، (جـ) في الاولى، لا تحدث (د) في التجربتين، لا تحدث (هـ) في التجربتين.

١٤٥ـ ان تحدث (ت) في التجربتين، (جـ) في الثانية، (د) في الاولى، (هـ) في الاولى.

١٦٠ـ ان تحدث (ت) في التجربتين، (جـ) في الثانية، لا تحدث (د) في التجربتين، لا تحدث (هـ) في التجربتين.

١٦١ـ ان تحدث (ت) في التجربتين، (جـ) في التجربتين، (د) في الاولى، (هـ) في الاولى.

١٧٦ـ ان تحدث (ت) في التجربتين، (جـ) في التجربتين، لاتحدث (د) في التجربتين، لا تحدث (هـ) في التجربتين.

١٧٧ـ ان تحدث (ت) في التجربتين، لا تحدث (جـ) في التجربتين، (د) في الاولى، (هـ) في الثانية.

....

١٩٢ـ ان تحدث (ت) في التجربتين، لا تحدث (جـ) في التجربتين، لا تحدث (د) في التجربتين، لاتحدث (هـ) في التجربتين.

١٩٣ـ لا تحدث (ت) في التجربتين، (جـ) في الاولى، (د) في الاولى، (هـ) في الاولى.

٢٠٨ـ لا تحدث (ت) في التجربتين، (جـ) في الاولى، لا تحدث (د) في التجربتين، لا تحدث (هـ) في التجربتين.

٢٠٩ـ لا تحدث (ت) في التجربتين، (جـ) في الثانية، (د) في الاولى، (هـ) في الاولى.

٢٢٤ـ لا تحدث (ت) في التجربتين، (جـ) في الثانية، لا تحدث (د) في التجربتين، لا تحدث (هـ) في التجربتين.

٢٢٥ـ لا تحدث (ت) في التجربتين، (جـ) في التجربتين، (د) في الاولى، (هـ) في الاولى.

٢٤٠ـ لا تحدث (ت) في التجربتين، (جـ) في التجربتين، لا تحدث (د) في التجربتين،لاتحدث (هـ) في التجربتين.

٢٤١ـ لا تحدث (ت) في التجربتين، لا تحدث (جـ) في التجربتين، (د) في الاولى، (هـ) في الاولى.

٢٥٦ـ لا تحدث (ت) في التجربتين، لا تحدث (جـ) في التجربتين، لا تحدث (د) في التجربتين، لا تحدث (هـ) في التجربتين.

وحينما نضرب العلم الاجمالي الاول في العلم ٢، لنحصل على العلم الاجمالي الثالث، نلاحظ ان عدد اطراف العلم الاجمالي الثالث ستكون بعد فرز الصور غير المحتملة (٥١٢) طرفا، لان: ٥ × ٢٥٦ = ١٢٨٠، (٢٥٦)طرفا منها على افتراض سببية (أ) لـ (ب) وهي محتملة جميعا، و (٢٥٦) طرفا على افتراض سببية (ت) لـ (ب) ويضحي (٦٤) طرفا منها فقط محتملا، وهي الاطراف التي تفترض حدوث (ت) في التجربتين، و (٦٤) طرفا محتملا ايضا على افتراض سببية (جـ)، و (٦٤) طرفا محتملا على افتراض سببية (د) و (٦٤) طرفا على افتراض سببية (هـ) فيكون مجموع اطراف العلم ٣ = ٢٥٦ + ٦٤ + ٦٤ + ٦٤ + ٦٤ = ٥١٢.

وسوف تكون قيمة احتمال التعميم الاستقرائي على اساس العلم الاجمالي الثالث = $\frac{١}{٢}$ ، اي: ان قيمة احتمال سببية (أ) لـ (ب) بعد تجربتين ناجحتين على اساس قاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية، وعلى اساس مبدأ الاحتمال العكسي ـ مساوية لـ = $\frac{٢٥٦}{٥١٢} = \frac{١}{٢}$.

اما على اساس مبدأ العكسي فهي =

$$= \frac{\frac{١}{٥} \times ١}{\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٥} + \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٥} + \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٥} + \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٥} + ١ \times \frac{١}{٥}}$$

$$\frac{\frac{١}{٥}}{\frac{٨}{٢٠}} = \frac{١}{٢}$$

وفق العلم ٣= $\frac{\text{عدد المراكز التي تحتلها الحادثة}}{\text{المجموع الكلي لاطراف العلم الاجمالي}}$ ،

وعدد المراكز التي تحتلها سببية (أ) لـ (ب) تساوي (٢٥٦) طرفا، والمجموع الكلي لاطراف العلم الاجمالي الثالث تساوي (٥١٢)، ويصبح ح =

$$\frac{ع^{٢}\,ن}{ع^{٣}\,ن} = \frac{٢٥٦}{٥١٢} = \frac{١}{٢} .$$

نعود الى البرهان على صحة الصيغة الاولى، التي طرحها الشهيد الصدر لتقييم احتمال التعميم:

$ح = \frac{ع^{٢} ن}{ع^{٣} ن}$. نلاحظ هنا ان البسط يمثل عدد المراكز التي تحتلها الحادثة، اي احتمال سببية (أ) لـ (ب)، والمقام يمثل المجموعة المتكاملة للحوادث المحتملة، ومن الواضح ان المقام يتمثل دائما في المجموع الكلي لاطراف العلم الثالث ـ على اساس قاعدة الضرب ـ اما البسط ـ وفق قاعدة الضرب ـ فهو يساوي دائما عدد اعضاء العلم الثاني ـ لان المراكز التي سوف تحتلها سببية (أ) لـ (ب) عبارة عن مجموعة الاطراف في العلم الثالث، التي تفترض سببية (أ)، وهذه المجموعة تساوي دائما مجموعة اطراف العلم ٢؛ اذ ان اطراف العلم ٢؛ تمثل مجموعة احتمالات وجود ما عدا (أ) من الاطراف المفترضة في (العلم ١)، وجميع هذه الاحتمالات تتعايش مع افتراض سببية (أ) لـ (ب).

اما اذا اردنا ان نقيس درجة احتمال سببية (ت)، او (جـ) او (د) او (هـ) وفق قاعدة الضرب فسوف نجدها مساوية لـ $\frac{٦٤}{٥١٢}$ ، لان مجموعة اطراف العلم٢ التي تمثل محتملات ما عدا (أ) لا يتعايش منها مع افتراض سببية ما عدا (أ)، اي افتراض ـ في مثالنا ـ سببية (ت)، او (جـ)، او (د)، او (هـ)، الا (٦٤) طرفا.

وقد جاء في كتاب الاسس المنطقية للاستقراء نص يوضح البرهان

على ان: $ح = \frac{ع^{٢} ن}{ع^{٣} ن}$ ، واليك النص كاملاً:

«ان قيمة احتمال سببية (أ) لـ (ب) = $\frac{\text{ع}^{2}\ \text{ن}}{\text{ع}^{3}\ \text{ن}}$ ، وذلك لان

(ع٢ ن) التي تعبر عن الحالات التي يضمها (العلم ٢) اما تتضمن سببية (أ) لـ (ب)، واما حيادية. فتشتق منها صورتان او عدة صور تكون واحدة منها حتما لصالح سببية (أ) لـ (ب)، وبهذا يكون عدد الصور التي تعتبر في صالح سببية (أ) لـ (ب) مساويا دائما لـ (ع٢ ن) وأمّا (ع٣ ن) فهي عبارة عن الحالات التي تتمثل في (العلم ٣)، وهي بمجموعها تعبر عن رقم اليقين، وبذلك تجعل مقاما في ذلك الكسر الذي يحدد قيمة احتمال سببية (أ) لـ (ب)»[1].

تفسير الصيغة الثانية:

ح = $\frac{2^{\text{ن}}}{2^{\text{ن}} + (\text{ع}^{1}\ \text{ن} - 1)}$ ، اي ان احتمال التعميم بعد اي عدد من

التجارب الناجحة يساوي: $\frac{2^{(\text{عدد التجارب})}}{2^{(\text{عدد التجارب})} + \text{عدد اعضاء العلم الاول} - 1}$

وبعبارة اخرى: ح =

$$\frac{\text{٢ مضروبا في نفسه بعدد التجارب}}{\text{٢ مضروبا في نفسه بعدد التجارب + عدد الاعضاء المعاصرة لـ (أ) في العلم١}}$$

(١) الاسس المنطقية للاستقراء ص ٢٦٨ ـ ٢٦٩.

والبرهان على ان: $ح = \frac{٢^{ن}}{٢^{ن} + (ع_{١}\,ن - ١)}$ ، يعني اثبات ان:

$$\frac{ع_{٢}\,ن}{ع_{٣}\,ن} = \frac{٢^{ن}}{٢^{ن} + (ع_{١}\,ن - ١)}$$

ولاجل البرهنة على ذلك نفترض ان:

$$\frac{ع_{٢}\,ن}{ع_{٣}\,ن} = \frac{(٢^{ن})^{(ع_{١}\,ن - ١)}}{(٢^{ن})^{ع_{١}\,ن - ١} + (ع_{١}\,ن - ١)(٢^{ن})^{(ع_{١}\,ن - ٢)}}$$

اي: ان عدد اعضاء العلم الاجمالي الثاني يساوي دائما ٢ مضروباً بنفسه بعدد التجارب مضروبا في نفسه بعدد اعضاء العلم الاول الا واحدا، وان عدد اعضاء العلم الثالث تساوي دائما ٢ مضروبا بنفسه بعدد التجارب، مضروبا بنفسه بعدد اعضاء العلم الاول مجموعا مع حاصل جمع (٢ مضروبا بنفسه بعدد التجارب مضروبا بنفسه بعدد اعضاء العلم الاول الا اثنين) مراتٍ تساوي عدد اعضاء العلم الاول الا واحدا ، اي نجمع $(٢^{ن})^{ع_{١}\,ن - ٢}$ مراتٍ مساوية لعدد اعضاء العلم الاول الا واحدا.

نفترض ان: $\frac{\text{ع}^{٢}\text{ن}}{\text{ع}^{٣}\text{ن}} = \frac{(٢^{\text{ن}})^{\text{ع}١\text{ن}-١}}{(٢^{\text{ن}})^{\text{ع}١\text{ن}-١} + (\text{ع}١\text{ن}-١)(٢^{\text{ن}})\ \text{ع}^{١\text{ن}-٢}}$

اذا ثبت هذا الافتراض فسوف يثبت ان: $\frac{\text{ع}^{٢}\text{ن}}{\text{ع}^{٣}\text{ن}} =$

$$\frac{٢^{\text{ن}}}{٢^{\text{ن}} + (\text{ع}١\text{ن}-١)}$$

ويتضح ذلك من خلال الخطوات التالية:

$$= \frac{(٢^{\text{ن}})^{\text{ع}١\text{ن}-١}}{(٢^{\text{ن}})^{\text{ع}١\text{ن}-١} + (\text{ع}١\text{ن}-١)(٢^{\text{ن}})^{\text{ع}١\text{ن}-٢}}$$

$$= \frac{(٢^{\text{ن}})^{\text{ع}١\text{ن}-٢} \times ٢^{\text{ن}}}{(٢^{\text{ن}})^{\text{ع}١\text{ن}-٢} \times ٢^{\text{ن}} + (\text{ع}١\text{ن}-١)(٢^{\text{ن}})\ \text{ع}^{١\text{ن}-٢}}$$

$$= \frac{(٢^{\text{ن}})^{\text{ع}١\text{ن}-٢} \times ٢^{\text{ن}}}{(٢^{\text{ن}})^{\text{ع}١\text{ن}-٢} \times (٢^{\text{ن}} + \text{ع}١\text{ن}-١)}$$

$$\frac{٢^{\text{ن}}}{٢^{\text{ن}} + \text{ع}١\text{ن}-١}$$

يبقى علينا ان نثبت ان:

$$\frac{\text{ع}_{٢}\,\text{ن}}{\text{ع}_{٣}\,\text{ن}} = \frac{(٢^{\text{ن}})^{\text{ع}_{١}\text{ن} - ١}}{(٢^{\text{ن}})^{\text{ع}_{١}\text{ن} - ١} + (\text{ع}_{١}\,\text{ن} - ١)\,(٢^{\text{ن}})^{\text{ع}_{١}\text{ن} - ٢}}$$

واذا ثبتت هذه المعادلة يثبت بالبرهان المتقدم ان:

$$\frac{\text{ع}_{٢}\,\text{ن}}{\text{ع}_{٣}\,\text{ن}} = \frac{٢^{\text{ن}}}{٢^{\text{ن}} + \text{ع}_{١}\,\text{ن} - ١}$$

الاثبات:

سنضع هذا الاثبات في خطوتين، نثبت في الاولى ان (ع٢ ن) = $(٢^{ن})^{ع١ن-١}$ ، وسنثبت في الخطوة الثانية ان :

$$(ع٣ن) = (٢^{ن})^{ع١ن-١} + (ع١ن-١)(٢^{ن})^{ع١ن-٢}$$

الخطوة الاولى:

من الواضح ان (ع ٢ ن) يمثل العلم الاجمالي، الذي يضم محتملات ما عدا (أ)، فقد تقدم ان لدينا علما اجماليا قبليا رمزنا له بـ (العلم ١) ويضم هذا العلم مجموعة الاطراف التي يحتمل ان تكون اسبابا لـ (ب).

وقد اشرنا الى اننا على اثر اي عدد من التجارب الناجحة سوف نحصل على (العلم ٢)، وهذا العلم يضم محتملات ما عدا (آ) حيث اعتبرنا احتمال سببية (أ) لـ (ب) هو الاحتمال المطلوب تنميته على اثر التجارب الناجحة.

على هذا الاساس سوف يضم (العلم ٢) الصور الممكنة لما عدا (أ) من اعضاء العلم الاول، اي الصور الممكنة لـ (ع١ ن ـ ١) والصور الممكنة لـ (ع١ ن ـ ١) نحصل عليها من خلال استخراج عدد الصور الممكنة لكل عضو من اعضاء (ع١ ن ـ ١)، ونضربها بعدد اعضاء (ع١ ن ـ ١).

نعود الى المثالين المتقدمين، فقد كان لدينا في المثال الاول (العلم ١)، وهو مؤلف من طرفين (أ) او (ت)، وكانت لدينا ثلاث تجارب ناجحة، وهذا يعني ان (العلم٢) سوف يضم محتملات (ت) خلال ثلاث تجارب وحيث

ان احتمال وجود (ت) في اي تجربة من التجارب يساوي $\frac{١}{٢}$ ، فهذا يعني ان لدينا علما اجماليا ثنائيا في كل تجربة، ولكي نحصل على قيمة احتمال وجود (ت) يجب ان نضرب عدد اعضاء العلم الاجمالي المتعلق في كل تجربة بعدد التجارب، اي ان نضرب ($\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$)، ونحصل على علم اجمالي نقيّم في ضوءه قيمة احتمال وجود (ت)، ومجموع اطراف هذا العلم الاجمالي يساوي (٢) مضروبا في نفسه بعدد التجارب، واذا رمزنا الى عدد التجارب بـ (ن)، تكون مجموع اطراف (العلم ٢) = $(٢^{ن})$ = $(٢^{ن})^{(ع١ ن-١)}$، لان ع١ ن ـ ١ = ١.

اما المثال الثاني، فقد كان لدينا العلم الاجمالي الاول، وهو مؤلف من خمسة اطراف («أ»، «ت»، «هـ»، «د»، «جـ»)، وكانت لدينا تجربتان ناجحتان، وهذا يعني ان (العلم ٢) سوف يضم محتملات (ت) و (هـ) و (جـ)، و (د)، وبما اننا نملك في كل واحد من هذه الاعضاء الاربعة علما اجماليا مؤلفا من حاصل ضرب ٢ في نفسه بعدد التجارب، اي: انه يساوي ($٢^{ن}$)، كما تقدم برهانه، فسوف يتألف العلم الاجمالي الذي يضم محتملات (أ)، (ت)، (هـ)، (جـ) من حاصل ضرب العلوم الاجمالية الاربعة ببعضها.

اي ان نضرب ($٢^{ن} \times ٢^{ن} \times ٢^{ن} \times ٢^{ن}$) وبعبارة اخرى ان نضرب $(٢^{ن})$ في نفسها بعدد اطراف (العلم١)، عدا أ = $(٢^{ن})^{ع١ ن-١}$، وبهذا يثبت ان :
ع٢ ن = $(٢^{ن})^{ع١ ن-١}$.

* * *

الخطوة الثانية:

نحاول ان نثبت في هذه الخطوة ان: ع٣ ن = $(٢^{ن})^{ع١ ن-١}$ + (ع١ ن - ١) $(٢^{ن})^{ع١ ن-٢}$.

نحن نعـرف ان العلم الاجمالي الثالث يستوعب احتمالات سببية اطراف العلم الاجمالي الاول، فحينما نضرب اطراف (العلم ١) في مجموعة اطراف (العلم ٢)، نحصل على (العلم الاجمالي ٣)، الذي يضم محتملات سببية كل طرف من اطراف (العلم ١)، وهذا واضح كما في الجدول الذي رسمناه لايضاح المثالين المتقدمين.

وقد تقدم في الصيغة الاولى اثبات ان محتملات سببية (أ) بعد اي عدد من التجارب الناجحة = (ع٢ ن) وهذا يعني انها تساوي $(٢^{ن})^{ع١ ن-١}$.

يبقى علينا ان نثبت ان مجموع احتمالات سببية ما عدا (أ) من اطراف العلم الاجمالي الاول تساوي دائما (ع١ ن - ١) $(٢^{ن})^{ع١ ن-٢}$.

(ع١ ن - ١) تعني عدد اعضاء (العلم ١) الا واحدا، وهذا يعني اننا نجمع $(٢^{ن})^{ع١ ن-٢}$ بنفسها بعدد اعضاء (العلم ١) - ١، مما يعني ان اي عضو من اعضاء (ع١ ن - ١) تساوي احتمالات سببيته $(٢^{ن})^{ع١ ن-٢}$.

وبهذا لا يبقى امامنا الا اثبات ان احتمالات سببية اي طرف من اطراف (العلم ١) عدا (أ) تساوي $(٢^{ن})^{ع١ ن-٢}$.

الاحتمالات التي تكون في صالح سببية اي طرف عدا (أ) عبارة عن الاحتمالات التي تفترض وقوع ذلك الطرف في كل التجارب الناجحة، اما ما

عداها من احتمالات (العلم ٢) فتصبح غير محتملة. فنحن لكي نحصل على (العلم ٣)، الذي يضم مجموع احتمالات سببية اطراف (العلم ١) علينا ان نضرب مجموع اطراف(العلم١)في مجموع اطراف (العلم ٢)، فاذا كان لدينا خمسة اطراف في (العلم١) ـ كما هو في المثال الثاني ـ فعلينا ان نضرب (٥) × (ع٢ ن) لنحصل بعد فرز الصور غير المحتملة على احتمالات السببيه التي تتجمع في (العلم٣).

واحتمال سببية (أ) يساوي $(٢^{ن})^{ع١ن-١}$ ، كما تقدم اثبات ذلك ، لان سببية (أ) تتعايش مع جميع اطراف العلم الثاني، اما سببية ما عدا (أ) من اعضاء العلم الاول فهي لا تتعايش الا مع الاطراف، التي تفترض وقوع ذلك العضو في كل التجارب، والاطراف التي تفترض وقوع اي عضو اخترناه من الاعضاء في كل التجارب تساوي دائما $(٢^{ن})^{ع١ن-٢}$.

والسر في هذه المساواة يكمن في تحليل طبيعة (العلم ٢)، فهذا العلم يضم محتملات وقوع ما عدا (أ) خلال التجارب، وقد قلنا انه يساوي دائما ($٢^{ن}$) مضروبا بنفسه بعدد اعضاء(العلم١) ـ ١، وفي مثالنا يعني ان نضرب ($٢^{ن} \times ٢^{ن} \times ٢^{ن} \times ٢^{ن}$)، و ($٢^{ن}$) تعني محتملات وقوع كل عضو من الاعضاء خلال التجارب، فهي اي ($٢^{ن}$) تمثل علما اجماليا يضم محتملات وقوع اي عضو من اعضاء (العلم ١) عدا (أ)، وقيمة احتمال وقوع ذلك العضو في كل التجارب يساوي دائما $\frac{١}{٢^{ن}}$ ، اي ان صورة واحدة فقط من مجموع محتملات وقوع اي عضو من اعضاء (العلم ٢) ـ ١ في صالح وقوع ذلك العضو خلال كل التجارب، وبما ان عددالاعضاء في (العلم٢)

تتألف من ضرب جميع محتملات كل عضو من اعضاء (العلم١ ـ أ) في بعضها، فهـذا يعني ان المحتملات التي تكون في صالح سببية اي عضو مساوية لضرب ١ × $(٢^{ن})^{ع^{١}ن-٢}$.

اذن! الاحتمالات التي تكون في صالح سببية اي طرف عدا (أ) تساوي $(٢^{ن})^{ع^{١}ن-٢}$.

اذن! (ع٣ ن) الـذي يضم محتمـلات سببية مجمـوع الاعضاء في (العلم١) يساوي:

احتمالات سببية (أ) + احتمالات سببية ما عدا (أ).

الاحتمالات التي في صالح سببية (أ) = $(٢^{ن})^{ع^{١}ن-١}$.

الاحتمالات التي في صالح سببية ما عدا (أ) = $(٢^{ن})^{ع^{١}ن-٢}$ + نفسها بعدد (ع١ ن ـ ١).

ومن ثم فهي تساوي (ع١ ن ـ ١) $(٢^{ن})^{ع^{١}ن-٢}$.

اذن! ع٣ ن= $(٢^{ن})^{ع^{١}ن-١} + (ع^{١}ن-١)(٢^{ن})^{ع^{١}ن-٢}$.

وبما ان (ع٢ ن) = $(٢^{ن})^{ع^{١}ن-١}$.

اذن! $\frac{ع^{٢}ن}{ع^{٣}ن} = \frac{(٢^{ن})^{ع^{١}ن-١}}{(٢^{ن})^{ع^{١}ن-١} + (ع^{١}ن-١)(٢^{ن})^{ع^{١}ن-٢}}$

وبما ان: $\frac{(٢^{ن})^{ع^{١}ن-١}}{(٢^{ن})^{ع^{١}ن-١} + (ع^{١}ن-١)(٢^{ن})^{ع^{١}ن-٢}}$

= ٢ن / (٢ن + ع١ ن ـ ١)

اذن! ع٢ ن / ع٣ ن = ن / (٢ن + ع١ ن ـ ١)

ولاجل مزيد من الايضاح نقول:

ان العلم الاجمالي الثاني ـ الذي يضم محتملات وقوع ما عدا «أ» هو في حقيقة الامر ناتج ضرب مجموعة من العلوم الاجمالية. فنحن اذا كان لدينا «أ»، و «ت»، و «هـ» كاسباب محتملة لـ «ب»، فهذا يعني ان لدينا علما اجماليا مؤلفا من ثلاثة اطراف، وهي ـ اي الاطراف ـ عبارة عن الاسباب المحتملة لـ «ب». وبموجب هذا العلم يكون احتمال سببية اي واحد من «أ»، او «ب»، او «هـ» مساويا لـ « $\frac{١}{٣}$ ». وهذا العلم الاجمالي قائم قبل التجربة، فيصح أن نسمية «العلم القبلي» او «العلم١».

وحينما نقوم بتجربتين ناجحتين، اي نلاحظ فيهما اقتران «أ» بـ «ب» فقط، فسوف ينشأ لدينا علم اجمالي جديد، وهو «العلم ٢»، حيث يضم محتملات وقوع «ت» و «هـ» في التجربتين.

واذا دققنا في هذا «العلم٢» نجد اننا لكي نجيب على الاستفهام التالي:

ما هي قيمة حدوث «هـ» و «ت» معا في كلتا التجربتين؟ فلابد من ضرب قيمة احتمال وقوع «هـ» في كلتا التجربتين في قيمة احتمال وقوع «ت» في كلتا التجربتين.

اما قيمة احتمال وقوع «هـ» في كلتا التجربتين فهو احتمال مركب من حادثتين مستقلتين، وهما وقوع «هـ» في التجربة الاولى ووقوع «هـ» في التجربة الثانية، وحينئذ لابد من ضرب قيمة احتمال وقوع «هـ» في التجربة الاولى في قيمة احتمال وقوع «هـ» في التجربة الثانية.

ولكن ما هي قيمة احتمال وقوع «هـ» في التجربة الاولى، وما هي قيمة احتمال وقوع «هـ» في التجربة الثانية؟

ان قيمة احتمال وقوع «هـ» في التجربة الاولى يساوي $\frac{١}{٢}$ ، لاننا نتكلم فعلا في تفسير الاستقراء، أي اننا لا نملك بالفعل معلومات استقرائية نركن اليها.

وحينئذ سوف يكون احتمال وقوع «هـ» واحتمال عدم وقوعه في التجربة الاولى متساويين. وهذا يعني اننا نملك علما اجماليا مؤلفا من طرفين. والامر كذلك بالنسبة لاحتمال وقوع «هـ» في التجربة الثانية، اي انه يساوي $\frac{١}{٢}$.

وحينئذ نستطيع ان نحدد قيمة احتمال وقوع «هـ» في كلتا التجربتين معا بضرب $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$. وسوف يكون « $\frac{١}{٤}$ »، وهذا يعني اننا نملك علما اجماليا مؤلفا من اربعة اطراف، وطرف واحد منه فقط لصالح وقوع «هـ» في كلتا التجربتين.

اما بالنسبة لاحتمال وقوع «ت» في كلتا التجربتين معا فهو يساوي ايضا احتمال وقوع «ت» في التجربة الاولى مضروبا في احتمال وقوع «ت» في التجربة الثانية، واحتمال وقوع «ت» في كل واحدة من التجربتين تساوي

$\frac{١}{٢}$ ايضا، وفق نفس الاسباب التي شرحناها في احتمال وقوع «هـ»، وعندئذ لا بد ان نضرب $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$ ، وسوف يكون احتمال وقوع «ت» في التجربتين معا مساويا لـ $\frac{١}{٤}$. وهذا يعني ان لدينا علما اجماليا مؤلفا من اربعة اطراف، يضم محتملات وقوع «ت» في التجربتين الناجحتين، وطرف واحد منه فقط لصالح وقوع «ت» في التجربتين معا.

وحينئذ نستطيع الاجابة على الاستفهام المتقدم: ما هي قيمة احتمال وقوع «ت» و «هـ» معا في التجربتين معا؟

وسوف يكون ح = $\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٦}$ ، اي اننا سوف نملك علما اجماليا مؤلفا من ستة عشر طرفا، تضم محتملات وقوع «ت» و «هـ»، وطرف واحد منه لصالح وقوع «ت» و «هـ» في التجربتين معا. وهذا العلم الاجمالي هو «العلم ٢».

نعود الى الوراء لنرى كيف تألف هذا العلم الاجمالي من «١٦» طرفا؟ من الواضح ان هذا العلم نشأ من ضرب عدد اطراف العلم الاجمالي الذي يضم محتملات وقوع «ت» في التجربتين، في العلم الاجمالي الذي يضم محتملات وقوع «هـ» في التجربتين. والعلم الاجمالي الذي يضم محتملات وقوع «ت» يساوي دائما «$٢^{ن}$» ، كما ان العلم الذي يضم محتملات «هـ» يساوي دائما «$٢^{ن}$» . لاننا نواجه في كل تجربة دائما علما اجماليا مؤلفا من طرفين، وهما وقوع «ت» وعدم وقوعه، فاذا كانت لدينا تجربتان لزم ان نضرب ٢ × ٢ وهو يساوي «$٢^{ن}$» . واذا كانت لدينا ثلاث تجارب لزم ان نضرب ٢ × ٢ × ٢ وهو يساوي «$٢^{ن}$» وهكذا .. والامر كذلك بالنسبة للعلم الاجمالي الذي يضم محتملات وقوع «هـ».

وهـذا يعني اننـا لاجـل الحصول على العلم الاجمالي الذي يضم محتملات وقوع «هـ» و «ت» فعلينا ان نضرب: $٢^{ن} \times ٢^{ن}$ ... وهو يساوي $(٢^{ن})^{(٤^{ن}-١)}$. واذا كان لدينا مضافا الى «هـ» و «ت» عامل آخر، وهو «ج» من المحتمل ان يكون سببا لـ «ب»، فهذا يعني ان نضرب: $٢^{ن} \times ٢^{ن} \times ٢^{ن}$، ... وهو يساوي $(٢^{ن})^{(٤^{ن}-١)}$.

ولكي نحصل على القيمة النهائية لاحتمال سببية «أ» لـ «ب» بعد تجربتين ناجحتين علينا ان نضرب «العلم١» في «العلم ٢»، ونكون «العلم ٣». وسوف نلاحظ ان العلم الثالث يتألف من ضرب احتمال سببية «أ» في كل اطراف «العلم ٢»، مضافا الى ضرب احتمال سببية «ت» في كل اطراف «العلم ٢»، مضافا الى ضرب احتمال سببية «هـ» في كل اطراف «العلم ٣».

ونلاحظ هنا ان كل اطراف «العلم٢» تتعايش مع احتمال سببية «أ» وهذا يعني ان احتمال سببية «أ» سوف يساوي $١ \times (٢^{ن})^{(٤^{ن}-١)}$. اي: ١ مضروبا في عدد اطراف «العلم ٢». اما احتمال سببية اي طرف من اطراف «العلم ١» ما عدا «أ» فهي تتعايش فقط مع الاطراف التي تفترض وقوع ذلـك الـطرف في التجربتين معا، واما الاطراف التي تفترض وقوع ذلك الطرف في تجربة واحدة فقط او عدم وقوعه في التجربتين معا فهي لا تتعايش مع افتراض سببيته، اذ كيف يكون سببا ولم يكن في كلتا التجربتين معا!

وهذا يعني ان عدد الاطراف ـ التي تؤيد سببية «ت» او «هـ»، او غيرها من الاطراف التي تفترض محتملة كاسباب في «العلم ١» ـ يساوي عدد اطراف «العلم ٢» التي تفترض وقوع «ت» او «هـ» في كلتا التجربتين

معا. او قل حاصل ضرب ١ × عدد الاطراف التي تؤكد وقوع «ت» او «هـ» في التجربتين معا، وعدد الاطراف التي تفترض وقوع «هـ» او «ت» او اي عنصر آخر من المحتمل ان يكون سببا لـ «ب» عدا «أ»، الذي تحقق وقوعه في التجربتين ، يساوي دائمًا $(٢^{ن})^{٤١ن-٢}$. اي ان عدد الاطراف التي تؤكد وقوع « ت » في التجربتين = $(٢^{ن})^{٤١ن-٢}$ ، وعدد الاطراف التي تؤكد وقوع « هـ » في التجربتين = $(٢^{ن})^{٤١ن-٢}$ ولاجل ايضاح ذلك نرجع الى الوراء قليلا لنلاحظ: ان احتمال وقوع «ت» في التجربتين معا = « $\frac{١}{٤}$ » كما تقدم . اي ان طرفا واحدا من اطراف العلم الاجمالي، الذي يضم محتملات وقوع «ت» لصالح وقوعه في التجربتين معا، والامر كذلك بالنسبة لاحتمال وقوع «هـ» في التجربتين معا. وبما ان العلم الثاني يتألف من ضرب عدد اطراف العلم الاجمالي، الذي يضم محتملات وقوع «ت» في عدد اطراف العلم الاجمالي، الذي يضم محتملات وقوع «هـ»، فهذا يعني ان الاطراف التي تؤيد وقوع «هـ» في التجربتين معا = ١ × ٤، او قل ١ × $٢^{ن}$ ، لاننا حينما نضرب $٢^{ن}$ × $٢^{ن}$ لنكون «العلم ٢» فهذا يعني ان نضرب كل طرف من اطراف ($٢^{ن}$) في كل اطراف ($٢^{ن}$) ، وبما ان طرفاً واحداً في ($٢^{ن}$) لصالح وقوع « هـ » في التجربتين ∴ سوف تكون الاطراف التي تؤيد وقوع «هـ» في التجربتن = ١ × $٢^{ن}$. ويساوي دائما ١ × $(٢^{ن})^{٤١ن-٢}$.

فلو افترضنا ان ما ينافس «أ» كاسباب في «العلم ١» كانت «ت»، «هـ»، «ج»، «د». فسوف يكون «العلم ٢» مؤلفا من ضرب: $٢^{ن}$ × $٢^{ن}$ × $٢^{ن}$ × $٢^{ن}$ وسوف تكون الاطراف في «العلم ٢» ، التي تؤيد وقوع اي عامل

من العوامل المفترضة اسبابا في «العلم ١» عدا «أ» عبارة عن طرف واحد من «$٢^{ن}$» مضروبا في $٢^{ن} \times ٢^{ن} \times ٢^{ن}$. وهو يساوي $١ \times (٢^{ن})^{ع١ن - ٢}$.

وبهذا يثبت ان مجموع الاطراف التي تؤيد وقوع اي واحد من: (هـ، ت، ج، د) في التجربتين يساوي: $(٢^{ن})^{ع١ن - ٢}$.

وهذا يعني ان الاطراف التي سوف تؤيد سببية «هـ»، او «ت»، او «ج»، او «د» في «العلم ٢» تساوي دائما $١ \times (٢^{ن})^{ع١ن - ٢}$ وبهذا يثبت ان احتمال سببية «هـ» $= ١ \times (٢^{ن})^{ع١ن - ٢}$

و ح سببية «ت» $= ١ \times (٢^{ن})^{ع١ن - ٢}$

و ح سببية «ج» $= ١ \times (٢^{ن})^{ع١ن - ٢}$

و ح سببية «د» $= ١ \times (٢^{ن})^{ع١ن - ٢}$

وهذا يعني ان مجموع احتمالات سببية ما عدا «أ» من اعضاء «العلم ١» تساوي في «العلم ٣» $(ع١ن - ١) \times (٢^{ن})^{ع١ن - ٢}$

وبما ان «العلم ٣» يضم احتمالات سببية كل اطراف «العلم ١»، اذن فسوف يكون: $ع٣ن = (٢^{ن})^{ع١ن - ١} + (ع١ن - ١)(٢^{ن})^{ع١ن - ٢}$

وحيث ان $ع٢ن = (٢^{ن})^{ع١ن - ١}$

$$\therefore ع٢ن = \frac{(٢^{ن})^{ع١ن - ١}}{(٢^{ن})^{ع١ن - ١} + (ع١ن - ١)(٢^{ن})^{ع١ن - ٢}}$$

$$= \frac{٢^{ن}}{٢^{ن} + ع١ن - ١}$$

وبهـذا يتم تفسـير الصيغـة الاولى والثـانية، نعـوض عن الرموز بالارقام، فنفرض اولا ان (ن) = ٢، (ع١ ن) = ٢ فسوف يكون لدينا ما يلي:

$$\text{ح} = \frac{٢^{\text{ن}}}{٢^{\text{ن}} + (\text{ع}١\,\text{ن} - ١)} = \frac{٢^{٢}}{٢^{٢} + (٢ - ١)}$$

$$= \frac{٤}{٥} .$$

ولنفرض ان عدد التجارب (ن) تكون (٣)، فسوف يكون لدينا

$\text{ح} = \frac{٢^{٣}}{٢^{٣} + (٢ - ١)} = \frac{٨}{٩}$ ، وهـذا يعني ان ازدياد عدد التجارب الناجحة يرفع قيمة احتمال التعميم، واذا افترضنا ان (ع١ ن) = (٣)، اي ان عدد الأعضاء المنافسة لـ (أ) يصبح اثنين بدلا من واحد، فسوف يكون لدينا: $\text{ح} = \frac{٢^{٢}}{٢^{٢} + (٣ - ١)} = \frac{٤}{٦}$ بدلا من $\frac{٤}{٥}$ كما يكون لدينا

$$\text{ح} = \frac{٢^{٣}}{٢^{٣} + (٣ - ١)} = \frac{٨}{١٠} \quad \text{بدلا من} \quad \frac{٩}{٨} \text{ ،}$$

يعني ان ازدياد عدد اعضاء (العلم ١) يؤثر سلبا على نمو احتمال التعميم، فكلما كثـرت الاعضاء المنافسة لـ (أ) يصبح نمو احتمال التعميم خلال التجارب ابطأ من نموه في حال قلة عدد الاعضاء المنافسة.

الحكومة اساس التقييم:

نعود الى صلب موضوع هذا التطبيق، حيث اتضح لنا ان احتمال سببية (أ) لـ (ب) ترتفع قيمته على اثر التجارب الناجحة، كما اتضح لنا ان تقييم درجة احتمال التعميم على اساس العلم الاجمالي الثاني تختلف عن قيمة احتمال التعميم على اساس العلم الاجمالي الثالث.

كما اتضح لنا ان تقييم الاحتمال على اساس (العلم ٣) يعني تطبيق قاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية، واستخدام مبدأ الاحتمال العكسي رياضيا.

ولكن تقدم في نظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي ان قاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية تنطبق في كل الحالات الا الحالات التي تنطبق فيها (بديهية الحكومة).

فاذا ثبت ان (العلم ١) و(العلم ٢) في هذا التطبيق من العلوم الاجمالية، التي تنطبق عليها بديهية الحكومة، فهذا يعني ان تقييم احتمال التعميم يتم وفق العلم الاجمالي البعدي فحسب، وان القيمة الاحتمالية القبلية لاحتمال التعميم تلغى من الحساب، اما اذا ثبت ان (العلم ١) و(العلم ٢) مما تنطبق عليها قاعدة الضرب فلابد من تقييم درجة احتمال التعميم على اساس الضرب بين (العلم ١) و (العلم ٢)، والحصول على (العلم ٣) لتقييم درجة احتمال التعميم على اساسه.

نعود الى المثال الاول، حيث كان لدينا علم اجمالي قبلي (العلم١)،

وهو العلم بان سبب (ب) اما ان يكون (أ) او (ت)، وكانت اطراف (العلم ١) اي مجموعة اعضاء العلم الاجمالي = (٢)، وكان لدينا علم اجمالي بعد ثلاث تجارب ناجحة (العلم ٢) وهو العلم بصور وقوع (ت)، وكانت مجموعة الاعضاء في (العلم ٢) تساوي ثمانية.

واذا اردنا ان نطبق (قاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية)، فهذا يعني ان نفترض ان الطرف الثاني من (العلم ١) «سببية (ت) لـ (ب)» ينفي الطرف الاول من (العلم ٢) «ان (ت) وقعت في التجربة الاولى، فقط» كما ينفي الطرف الثاني والثالث والرابع والخامس والسادس والثامن.

لكن افتراض هذا التنافي يتوقف على ان لا تكون احدى القيمتين الاحتماليتين حاكمة على الاخرى.

وهنا نلاحظ: ان (العلم ١) بعد ثلاث تجارب، اي العلم الاجمالي بالسببية بعد ثلاث تجارب ناجحة سوف يتصف بصفة، وهي ان السبب موجود في كل التجارب الثلاثة. فالقيمة الاحتمالية التي نمنحها لكل واحد من طرفي (العلم ١) تتوقف على اثبات اتصافه بكونه موجودا في التجارب الثلاث. والطرف الاول والثاني والثالث والرابع والخامس والسادس والثامن من (العلم ٢) تنفي اتصاف الطرف الثاني من (العلم ١) بتلك الصفة، فهي تفترض عدم وجوده في كل التجارب، ومن هنا فهي تنفي كونه (اي الطرف الثاني من العلم ١) طرفا من اطراف (العلم ١)، وتطبيقا لبديهية الحكومة المتقدمة ، تكون القيم الاحتمالية من (العلم ٢) حاكمة على القيم الاحتمالية في (العلم ١) ولا تصلح قيم (العلم ١) لكي تنفي قيم (العلم ٢)، وعليه يلغى

(العلم ١) من حساب تقييم احتمال الحادثة، ونعتمد على العلم الاجمالي البعدي فقط لاجل تحديد قيمة احتمال التعميم السببي.

وبعبارة اخرى: اننا بعد ثلاث تجارب لا نعقل منح احتمال سببية (أ) لـ (ب) او (ت) لـ (ب) قيمة احتمالية، دون ان يكون (أ) او (ت) موجودا في التجارب الثلاث.

ومن هنا سوف يتصف الطرف الذي يستمد من (العلم١) قيمة احتمالية بصفة، وهذه الصفة هي:

ان يكون موجودا في التجارب الثلاث.

واثبات وجوده في التجارب الثلاث لا علاقة له بالعلم الاجمالي القبلي (العلم ١)، انما نثبت وجوده في التجارب الثلاث على اساس (العلم ٢)، ومن ثَمّ يكون اثبات كونه طرفا من اطراف (العلم ١) متوقفاً على القيمة الاحتمالية التي يمنحها (العلم ٢)، والتي تثبت او تنفي اتصافه بانه (موجود في التجارب الثلاث) وعلى هذا الاساس يكون (العلم ٢) حاكما في قيمه الاحتمالية على (العلم ١).

ومن هنا صح لنا القول: ان احتمال التعميم السببي (التعميم الاستقرائي) ـ في ضوء التطبيق الاول، الذي افترضنا فيه الايمان باستحالة وجود حادثة بلا سبب، واحتمال علاقة السببية في مفهومها العقلي ـ يتم تقييمه على اساس العلم الاجمالي البعدي، وان القيمة الاحتمالية القبلية (اي قيمة احتمال الحادثة قبل التجربة) لا تؤخذ بنظر الاعتبار، انما نعتمد على القيم الاحتمالية التي يضمها (العلم ٢)، والتي تتألف في ضوء التجارب والاختبارات الناجحة.

التطبيق الثاني:

نلطلق في هذا التطبيق من الشك في امكان وجود حادثة بلا سبب، اي الشك باستحالة الصدفة المطلقة، والشك بان العلاقة بين العلة والمعلول هي علاقة اللزوم والضرورة.

من الواضح ان هذا التطبيق يختلف عن التطبيق السابق في نقطة جوهرية، وهي اننا نفترض في هذا التطبيق الشك في استحالة الصدفة المطلقة، ومع هذا الافتراض يتعذر علينا الافادة من (العلم ٢) الذي تقدم بيانه في التطبيق الاول، لرفع قيمة احتمال التعميم الاستقرائي، اذ ان اطراف (العلم ٢) التي تنفي وجودها عدا (أ) سوف لا تعيّن سببية (أ)، دون افتراض ضرورة وجود سبب لـ (ب).

اما اذا افترضنا ـ منذ البدء ـ الشك باستحالة الصدفة المطلقة وضرورة وجود سبب لـ (ب) فهذا يعني ان اطراف (العلم ٢) كلها حيادية امام سببية (أ) او (ت) لـ (ب)، وحدوث (ب) بلا سبب.

وهذا يعني اننا مهما كررنا التجارب الناجحة فسوف لا نستطيع رفع قيمة احتمال التعميم الاستقرائي اكثر من ($\frac{١}{٢}$).

وعلى اساس هذه العقبة، التي تقف امام تطبيق نظرية الاحتمال على الدليل الاستقرائي، اعتقد بعض الباحثين كـ (راسل) حاجة الدليل الاستقرائي لاتخاذ العلية (مصادرة).

لكن نظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي تتيح لنا حين تطبيقها على الدليل الاستقرائي تنمية احتمال التعميم الاستقرائي بشكل نافع، حيث نحاول في هذا الفرض تنمية احتمال استحالة الصدفة المطلقة من خلال

التجارب الناجحة، وحينها يكتسب هذا الاحتمال درجة كبيرة جدا ≃ ١، فسوف يحصل احتمال التعميم الاستقرائي على درجة اكبر منها.

ايضاح ذلك:

استحالة وجود حادثة بلا سبب (استحالة الصدفة المطلقة) = ان عدم السبب علة لعدم المسبب.

اي: ان الايمان بضروة وجود سبب لكل حادثة من الحوادث ينتج عنه الايمان بان عدم وجود السبب يؤدي بالضرورة الى عدم وجود المسبب، فما دمنا نعتقد بان وجود (ب) يستلزم بالضرورة وجود سبب لها، فهذا يعني ان عدم وجود السبب يستلزم بالضرورة ايضا عدم وجود (ب).

نعود الى فرضية التطبيق الثاني، حيث افتراضنا الشك باستحالة الصدفة المطلقة،والشك بضرورة وجود(ب) على اثر وجود (أ)، اي سيكون لدينا علم اجمالي باحدى الحادثتين: استحالة الصدفة المطلقة، او امكان الصدفة المطلقة.

ننطلق من هذا العلم الاجمالي، مستخدمين نظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي، نلاحظ اولا: ان طرفي العلم الاجمالي المتقدم ما دمنا نتحدث قبل الاستقراء والمعلومات الاستقرائية، وما دمنا نريد تفسير اساس الاستقراء ـ لا يترجح احدهما على الاخر، اي: ان القيمة الاحتمالية لكل منهما واحدة متساوية، وهذا يعني ان (ح) استحالة الصدفة المطلقة = $\frac{١}{٢}$.

على اساس ما تقدم سوف تكون قيمة احتمال القضية التي تقرر (عدم السبب علة لعدم المسبب)= $\frac{١}{٢}$

ولاجل تيسير حساب قيمة الحوادث نفترض ان الاسباب المحتملة لـ (ب) تنحصر بـ (أ) فقط، ثم نقوم بالتجربة الاولى فنلاحظ ان (ب) تغيب بغياب (أ)، اي نلاحظ اقتران عدم (ب) بعدم (أ)، ثم نجرب ثانية فنلاحظ ايضا اقتران عدم (ب) بعدم (أ)، حينئذ يتولد لدينا العلم الاجمالي الشرطي التالي:

اذا لم يكن عدم (أ) علة لعدم (ب) فاما ان يقترن (أ) (ب) في التجربة الاولى فقط، واما ان يقترنا في التجربة الثانية فقط، واما ان يقترنا في التجربتين، واما ان لا يقترنا في التجربتين.

وهذا علم اجمالي شرطي، شرطه افتراض نفي استحالة الصدفة المطلقة، وجزاؤه مردد بين اربعة بدائل، وهذا يعني اننا امام علم اجمالي مؤلف من اربعة اطراف:

١ـ ان يثبت عدم (ب) في التجربة الاولى فقط.

٢ـ ان يثبت عدم (ب) في التجربة الثانية فقط.

٣ـ ان يثبت عدم (ب) في التجربة الاولى والثانية.

٤ـ ان لا يثبت عدم (ب) في التجربتين.

نعيد الى الذكرى القاعدة، التي قررناها في نظرية الاحتمال، والتي تقول:

(كل علم اجمالي شرطي ـ يضم مجموعة من القضايا الشرطية المحتمله، التي تشترك في شرط واحد، وتختلف في جزاءاتها ـ ينفي الشرط

المشترك بقيمة احتمالية تساوي حاصل جمع القيم الاحتمالية للقضايا الشرطية المحتملة، التي علمنا بكذب جزاءها في اطار مجموعة اطراف العلم الشرطي).

وحينما نطبق هذه القاعدة على العلم الاجمالي الشرطي، الذي تقدم ذكره نلاحظ:

آ ـ ان هذا العلم الاجمالي يضم اربعة قضايا شرطية تشترك في شرط واحد، وهو (اذا لم تكن الصدفة المطلقة مستحيلة)، وجزاءاتها مرددة بين (فيثبت عدم (ب) في التجربة الاولى فقط) او (يثبت عدم (ب) في التجربة الثانية)......

ب ـ اننا نعلم بعد وقوع الاقتران في الاختبارين الناجحين بين (أ) و (ب) كذب الجزاء في ثلاث قضايا من القضايا الشرطية الاربعة، التي يضمها العلم الاجمالي الشرطي.

جـ ـ تطبيقا للقاعدة المتقدمة نقرر: ان هذا العلم الاجمالي الشرطي يثبت كذب الشرط، اي ينفي امكان الصدفة المطلقة بقيمة احتمالية تساوي حاصل جمع القيم الاحتمالية للقضية الشرطية الاولى والثانية والرابعة.

د ـ وحيث ان هذه القضايا الشرطية الاربعة متساوية في قيمها الاحتمالية يثبت نفي امكان الصدفة المطلقة اي تثبت استحالة الصدفة المطلقة بدرجة احتمالية تساوي $\frac{٣}{٤}$.

هـ ـ تبقى امامنا القضية الشرطيه الثالثه، التي تقرر: (اذا كانت ألصدفه المطلقه ممكنة فسوف يثبت عدم (ب) في التجربيتن). وقد جاء في الاسس المنطقية للاستقراء:

(وامـا القيمة الاحتمالية لتلك القضية الشرطية فهي حيادية تجاه السببية وبذلك يحصل احتمال السببية على نصفها، وتكون قيمته مساوية لقيمة العلم الاجمالي الشرطي، باستثناء نصف قيمة من قيم اطرافه ....)[١].

اي ان: القيمة الاحتمالية لاستحالة الصدفة المطلقة سوف تساوي $\frac{٣\frac{١}{٢}}{٤} = \frac{٧}{٨}$ ، اما اذا كانت عدد التجارب الناجحة ثلاثة فسوف يكون ح= $\frac{٧\frac{١}{٢}}{٨} = \frac{١٥}{١٦}$ ... وهكذا تزداد قيمة احتمال استحالة الصدفة المطلقة بزيادة التجارب الناجحة التي لاحظنا فيها تكرار اقتران عدم المسبب بعدم السبب.

و- ومن الواضح ان قيمة احتمال استحالة الصدفة المطلقة بالطريقة السابقة (وفقا للعلم الاجمالي الثاني) تنسجم مع افتراض الغاء (العلم ١) والاعتماد على (العلم٢) فقط، اي تطبيق بديهية الحكومة.

ز- من الواضح - في ضوء ما تقدم - اننا نملك علمين اجماليين، يقرر (العلم ١) ان عدم (ب)، اما ان يكون معلولا لعدم (أ) واما ان يكون عدم (ب) صدفة مطلقة، وهذا علم اجمالي مؤلف من طرفين، وقد تقدم ان قيمة احتمال الصدفة المطلقة = $\frac{١}{٢}$ وقيمة احتمال استحالة الصدفة المطلقة = $\frac{١}{٢}$.

و (العلم ٢) يقرر قيمة احتمالية جديدة لاحتمال استحالة الصدفة المـطلقـة = $\frac{٧}{٨}$ ، واذا لاحـظنا (العلم ١) نجد ان الطرف الثاني منه

---

(١) الاسس المنطقية للاستقراء ص ٢٨٧.

(استحالة الصدفة المطلقة) يتنافى مع الاطراف (الاول والثاني والرابع) من (العلم ٢).

ح ـ تقدم في نظرية الاحتمال اننا في حالة هذين العلمين علينا ان نلاحظ اولا: هل ان القيم الاحتمالية لـ (العلم٢)حاكمة على القيم الاحتمالية في (العلم ١) ام لا؟

فاذا كانت حاكمة فهذا يعني تطبيق بديهية الحكومة، وسوف ينفرد (العلم ٢) في تقدير درجة احتمال الحادثة، اما اذا لم تكن حاكمة فيتعين تطبيق قاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية ، وتقييم درجة احتمال الحادثة وفق العلم الثالث، الحاصل نتيجة الضرب وفرز الصور غير المحتملة.

ط ـ حينما نلاحظ (العلم ١) و (العلم ٢) لا نجد لايٍّ منهما حكومة على الاخر؛ لان اطراف كلا العلمين لا تنفي طرفية ايٍّ من اطراف الاخر.

ك ـ اذن! علينا تطبيق قاعدة الضرب، وبالضرب نحصل على الاطراف التالية:

١ـ استحالة الصدفة المطلقة، وعدم ثبوت (ب) في التجربة الاولى فقط.

٢ـ استحالة الصدفة المطلقة، وعدم ثبوت (ب) في التجربة الثانية فقط.

٣ـ استحالة الصدفة المطلقة، وعدم ثبوت (ب) في التجربتين.

٤ـ استحالة الصدفة المطلقة، وثبوت (ب) في التجربتين.

٥ـ امكان الصدفة المطلقة، وعدم ثبوت (ب) في التجربة الاولى فقط.

٦ـ امكان الصدفة المطلقة، وعدم ثبوت (ب) في التجربة الثانية فقط.

٧ـ امكان الصدفة المطلقة، وعدم ثبوت (ب) في التجربتين.

٨ـ امكان الصدفة المطلقة، وثبوت (ب) في التجربتين.

وبعد فرز الصور غير المحتملة، وهي الصورة الاولى والثانية والرابعة، يتألف (العلم ٣) من خمسة اطراف:

١ـ استحالة الصدفة المطلقة، وعدم ثبوت (ب) في التجربتين.

٢ـ امكان الصدفة المطلقة، وعدم ثبوت (ب) في التجربة الاولى فقط.

٣ـ امكان الصدفة المطلقة، وعدم ثبوت (ب) في التجربة الثانية فقط.

٤ـ امكان الصدفة المطلقة، وعدم ثبوت (ب) في التجربتين.

٥ـ امكان الصدفة المطلقة، وثبوت (ب) في التجربتين.

ومن الواضح ان (ح) استحالة الصدفة المطلقة سوف يستحوذ على اربعة اطراف من مجموع خمسة اطراف، وبهذا يتضح ايضا ان قيمة (ح) في ضوء (العلم ٣) ووفقا لقاعدة الضرب، سوف تكون اصغر من قيمة (ح) في ضوء (العلم ٢) وعلى اساس بديهية الحكومة، ولكن زيادة التجارب الناجحة سوف يؤثر على رفع قيمة احتمال التعميم المطلوب حتى اذا استخدمنا قاعدة الضرب، وبذلك يثبت ان احتمال استحالة الصدفة المطلقه سوف

يحصـل على قيمـة احتمالية كبيرة جدا ≃ (١) اذا كانت عدد التجارب الناجحة كبيرة جدا.

يبقى امـامنا اثبات قيمة احتمال التعميم الاستقرائي، اي اثبات سببية (أ) لـ (ب)، وفي هذه الحالة سوف نكون امام فرضين:

الاول ـ ان يكون ما يحتمل سبباً لـ (ب) منحصرا في (أ) فقط.

الثاني ـ ان يكون ما يحتمل سبباً لـ (ب) غير منحصر في (أ) بل هناك عامل او عوامل اخرى يمكن ان تكون اسبابا لـ (ب) مضافا الى (أ).

الفرض الاول:

ابتدأنا هذا التطبيق مفترضين الفرض الاول لسهولة الحساب، وعلى اساس هذا الفرض : (اذا ثبتت السببية العدمية واستحالة الصدفة المطلقة بقيمة احتمالية كبيرة مقاربة للعلم، ثبت بقيمة احتمالية اكبر سببية (أ) لـ (ب)، لان استحالة الصدفة المطلقة تتضمن سببية (أ) لـ (ب) بينما يمكن افتراض السببية الوجودية بين (أ) و (ب) حتى مع افتراض امكان الصدفة المطلقة)[1].

وهذا يعني ان الطرف الرابع من (العلم ٣) الذي هو في صالح امكان الصـدفـة المـطلقـة سوف يكون حياديا ازاء احتمال سببية (أ) لـ (ب)، والاطراف الاخرى من (العلم ٣) كلها في صالح سببية (أ) لـ (ب)، وحيث لا يوجد مبرر لترجيح احتمال سببية (أ) لـ (ب) على عدم احتمال سببية

---

(١) الاسس المنطقية للاستقراء ص ٢٨٧.

(أ) فسوف يستحوذ احتمال سببية (أ) لـ (ب) على نصف القيمة الاحتمالية للطرف الرابع من (العلم ٣) وهذا يعني ان احتمال سببية (أ) لـ (ب) يزيد على احتمال استحالة الصدفة المطلقة بـ ($\frac{١}{٢}$)، اي اذا كان (ح) استحالة الصدفة المطلقة = $\frac{م}{ن}$ ، فسوف يكون احتمال التعميم الاستقرائي (احتمال السببية) ـ على اساس الفرض الاول ـ مساويا لـ:

$$\frac{م + \frac{١}{٢}}{ن} \cdot = \frac{٢م + ١}{٢ن}$$

الفرض الثاني:

اذا افترضنا في هذا التطبيق ان هناك اكثر من عنصر يتنافس على سببية (ب) فهناك الى جانب (أ) عنصر او اكثر يحتمل ان يكون سببا لـ (ب)، فما هي القيمة الاحتمالية للتعميم السببي حينئذ؟

يقول (الاسس المنطقية للاستقراء) في الجواب:

«واذا افترضنا ان من المحتمل ان يكون لـ (ب) سبب آخر ايضا كـ (ت) و (جـ) امكن ان نتخذ ضد هذا الاحتمال ـ بعد التخلص من احتمال الصدفة المطلقة ـ نفس الطريقة التي فسرنا بها الدليل الاستقرائي في التطبيق السابق»[1].

ومن الواضح ان تفسير الدليل الاستقرائي على اساس التطبيق الاول يستدعي افتراض الايمان باستحالة الصدفة المطلقة، اي اليقين بان عدم السبب علة لعدم المسبب، ومن هنا كان لابد من التخلص من احتمال

---

(١) ص ٢٨٧.

الصدفة المطلقة، وهذا يعني ان منح التعميم الاستقرائي «سببية (أ) لـ (ب)» قيمة احتمالية معقولة سوف يتوقف على بلوغ احتمال استحالة الصدفة المطلقة درجة اليقين.

ومن الواضح ان نظرية الاحتمال لا تستطيع ان تحقق هذا الانجاز بكل قواعدها وبديهياتها، انما نستطيع وفق هذه النظرية ان نبلغ باحتمال استحالة الصدفة المطلقة درجة احتمالية كبيرة، ومهما ازداد عدد التجارب يبقى احتمال الصدفة المطلقة قائما، اي ان الاحتمال الرياضي للصدفة المطلقة لا يبلغ الصفر مهما ازداد عدد التجارب.

ويحسن الالتفات هنا الى ان العلم الاجمالي الشرطي في هذا التطبيق يتجه اساسا لرفع قيمة احتمال (استحالة الصدفة المطلقة)، الى درجة كبيرة جدا، ومن ثم نستطيع ان نثبت قيمة احتمال التعميم بدرجة اكبر، ولكن يمكن استخدام علم اجمالي شرطي آخر يتجه اساسا لرفع قيمة احتمال التعميم السببي مباشرة، وهذا ما سوف يتم استخدامه في التطبيق الثالث.

التطبيق الثالث:

ننطلق في هذا التطبيق من افتراض الشك بالسببية الوجودية بمفهومها العقلي، والايمان بامكان الصدفة المطلقة.

على اساس هذا المنطلق لا يمكننا الافادة من العلم الاجمالي، الذي اعتمدناه في التطبيق الأول بغية رفع قيمة احتمال التعميم السببي (التعميم الاستقرائي) لان ذلك العلم الاجمالي يمكنه رفع قيمة احتمال التعميم بفضل الايمان المسبق باستحالة الصدفة المطلقة، ونحن هنا نفترض الايمان بامكان الصدفة المطلقة.

ولا يمكن الافادة ايضا من العلم الاجمالي الشرطي، الذي تقدم في التطبيق الثاني، بغية رفع قيمة احتمال (استحالة الصدفة المطلقة)، لاننا نفترض في هذا التطبيق امكان الصدفة المطلقة.

ولكن يمكن ابراز علم اجمالي شرطي جديد، يمكن ان نرفع ـ في ضوءه ـ قيمة احتمال سببية (أ) لـ (ب) في ضوء التجارب.

لنفترض اولا ـ ان ما يحتمل كونه سببا لـ (ب) هو (أ) فقط، وفي هذه الحالة سيكون لدينا علم اجمالي قبلي مؤلف من طرفين سببية (أ) لـ (ب) وعدم سببية (أ) لـ (ب).

وبعد تجربتين ناجحتين سيكون لدينا العلم الاجمالي الشرطي التالي: (اذا لم تكن (أ) سببا لـ (ب) فمن المحتمل ان توجد (ب) في التجربة الاولى فقط، ومن المحتمل ان توجد (ب) في التجربة الثانية فقط، ومن المحتمل ان توجد (ب) في التجربتين معا، ومن المحتمل ان لا توجد (ب) في التجربتين معا).

وهذه اربع قضايا شرطية تشترك في شرط واحد، وتختلف في الجزاء، وحيث اننا اجرينا تجربتين ناجحتين لاحظنا فيهما اقتران (ب) بـ (أ) فهذا يعني ان الجزاء في القضية الشرطية الاولى والثانية والرابعة كاذب، ولاجل ان تصدق القضية الشرطية في حال كذب الجزاء لابد من كذب الشرط فيها، وهذا يعني كذب الشرط في ثلاث قضايا من القضايا الاربعة، وكذب الشرط يعني ثبوت سببية (أ) لـ (ب)، وبهذا يثبت ان ثلاثة اطراف من اطراف العلم الاجمالي الشرطي ـ بعد تجربتين ناجحتين ـ تثبت التعميم السببي.

لكننا نملك علما اجماليا قبليا يتنافى مع هذا العلم الاجمالي الشرطي، وحيث ان العلم الشرطي في اثباته لسببية (أ) لا ينفي مصداقية عدم السببية للعلم الاول، فهذا يعني عدم حكومة احد العلمين على الاخر. وعلى هذا الاساس لابد من استخدام قاعدة الضرب في العلوم الاجمالية. وبموجبها سوف تكون قيمة احتمال التعميم السببي بعد تجربتين ناجحتين مساوية لـ ($\frac{٤}{٥}$).

«اما في حالة افتراض اشياء كثيرة يحتمل كونها اسبابا لـ (ب) من قبيل (ت) و (جـ)، فيمكننا ـ اولاً ـ ان نستخدم العلم الشرطي المذكور لمصلحة السببية ككل بادخال تعديل في العلم الشرطي وجعل صيغته كما يلي:

(اذا لم يكن شيء من الاشياء المقترنة بـ (ب) باستمرار في التجارب الناجحة سببا لـ (ب) فاما، واما ...... الخ)[1] وهذا العلم سوف يعطي قيمة احتمالية كبيرة لكون احد الاشياء المقترنة بـ (ب) سببا، وبعد ذلك نعين السبب في (أ) بنفس الطريقة التي استعملناها في التطبيق الاول»[2].

التطبيق الرابع:

ننطلق في هذا التطبيق من الايمان بنفي السببية الوجودية بمفهومها العقـلي، اي: الايمان بان العلاقة بين السبب والمسبب ليست هي علاقة اللزوم والضرورة، انما هي علاقة الاقتران المطرد.

---

(١) اي: اما ان تحدث (ب) في التجربة الاولى فقط، واما ان تحدث في التجربة الثانية فقط واما ان تحدث في التجربتين معا، واما ان لا تحدث في التجربتين معا.

(٢) الاسس المنطقية للاستقراء، ص ٢٩٢.

وعلى هذا الاساس فسوف تكون مهمة البحث ـ في هذا التطبيق ـ تنمية احتمال التعميم الاستقرائي، الذي يعني علاقة الاقتران المطرد، وعلاقة الاقتران بين (أ) و (ب) ـ تاسيسا على ما تم بيانه في ضوء الاسس المنطقية للاستقراء ـ لا تعبرعن علاقة بين مفهوم (أ) و (ب) وانما هي عبارة عن علاقات مستقلة بين كل مصداق من مصاديق (أ) و (ب).

من هنا فسوف تكون قيمة احتمال التعميم الاستقرائي ـ على اساس المفهوم التجريبي للسببية ـ قبل التجارب الناجحة تساوي حاصل ضرب القيم الاحتمالية لاقتران كل فرد من افراد (أ) بكل فرد من افراد (ب).

وبما ان قيمة احتمال اقتران اي فرد من افراد (أ) بـ (ب) يساوي احتمال عدم الاقتران ـ قبل التجربة ـ فهذا يعني ان (ح) التعميم القبلي = $(\frac{١}{٢})^{\text{عدد الأفراد (أ)}}$.

ولو افترضنا ان عدد افراد (أ) عشرة، فهذا يعني ان القيمة القبلية لاحتمال التعميم الاستقرائي = $(\frac{١}{٢})^{١٠}$. والقيمة البعدية لاحتمال التعميم الاستقرائي لا تتجاوز النصف مهما ازداد عدد التجارب الناجحة، اي اننا لو اختبرنا تسعة من افراد (أ) ولاحظنا اقترانها بـ (ب) فسوف يكون احتمال التعميم = $(\frac{١}{٢})$. كما لو لاحظنا اقتران ثمانية من افراد (أ) بـ (ب) فسوف تكون قيمة احتمال التعميم = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$.

لكن هناك علما اجماليا شرطيا يمكن اتخاذه اساسا لتنمية احتمال التعميم الاستقرائي على اساس المفهوم التجريبي للسببية، فنحن بعد اربع تجارب ناجحة لاحظنا فيها اقتران (أ) بـ (ب) سوف نعلم بما يلي:

اذا كان هناك فرد من افراد (أ) ـ على افتراض ان افراد (أ) عشرة ـ لا يقترن بـ (ب) فاما ان يكون (أ ١)وامّـاان يكون (أ ٢) ... (أ ١٠).

وهذا علم اجمـالي شرطي، مؤلف من عشر قضايا شرطية تشترك في شرط واحد، وتختلف جزاءاتها، وبما ان القضايا الشرطية الاربعة ثبت كذب جزاءها فهي ستثبت كذب شرطها بنفس القيمة الاحتمالية التي تتمتع بها، اي سوف يثبت ان ليس هناك فرد من افراد (أ) لا يقترن بـ (ب) بقيمة احتمالية تساوي حاصل جمع القيم الاحتمالية للقضايا الشرطية الاربعة، التي ثبت كذب الجزاء والشرط فيها.

اما القضايا الشرطية الستة الاخرى فهي حيادية ازاء صدق شرطها وعدمه، ومن ثمَّ فهي حيادية ازاء التعميم الاستقرائي الذي يساوي ان كل افراد(أ) تقترن بـ (ب).

وعلى اساس هذا العلم الاجمالي الشرطي سوف تكون قيمة احتمال

التعميم ـ في الفرض ـ مساوية لـ $\frac{٤}{١٠} + \frac{٣}{١٠} = \frac{٧}{١٠}$ وكلما ازداد عدد التجارب الناجحة سوف تزداد قيمة احتمال التعميم.

ونلاحظ هنا ما يلي:

اولا ـ ان هذا العلم الاجمالي الشرطي لا يتحدث عن الواقع، بل ليس لجزاءه واقع محدد، وقد تقدم ـ في البديهيات الاضافية ـ ان هذا اللون من العلوم الشرطية لا يمكن اتخاذه اساسا لتنمية احتمال التعميم الاستقرائي.

ثانيا ـ ان تنمية احتمال التعميم على اساس هذا العلم الشرطي ليست امرا عمليا لسببين رئيسيين:

أ ـ ان مصاديق اي مفهوم من المفاهيم لا يمكن عدها واحصاؤها عمليا.

ب ـ اننا لو اغمضنا النظر عن امكانية احصاء مصاديق المفاهيم المستخدمة في العلوم عادة، و افترضنا امكانية احصائها، فسوف نلاحظ ان عدد مصاديق اي مفهوم من المفاهيم يبلغ رقما كبيرا جدا، ولنفرضه ١٠/٠٠٠/٠٠٠، وعلى هذا الاساس سوف تكون قيمة احتمال التعميم بعد

$$\text{تجربة ناجحة} = \frac{١}{١٠/٠٠٠/٠٠٠} + \frac{\frac{١٠/٠٠٠/٠٠٠ - ١}{٢}}{١٠/٠٠٠/٠٠٠} \simeq \frac{١}{٢}\text{،}$$

وبعد الف تجربة ناجحة =

$$\frac{١٠٠٠}{١٠/٠٠٠/٠٠٠} + \frac{\frac{١٠/٠٠٠/٠٠٠ - ١}{٢}}{١٠/٠٠٠/٠٠٠} \simeq \frac{١}{١٠/٠٠٠} + \frac{١}{٢}$$

وهذا يعني ان قيمة احتمال التعميم بعد عدد هائل من التجارب تنمو بمقدار ضئيل جدا.

وبهذا يثبت ان الغاء احتمال السببية بمفهومها العقلي، والجزم القبلي بان علاقة السببية بين (أ) و (ب) لا تتضمن اي معنى من معاني اللزوم والضرورة يقضي على الدليل الاستقرائي، ولا يسمح لنظرية الاحتمال ان تنمّي قيمة احتمال التعميم الاستقرائي.

على ان ننوه اخيرا بان المذهب التجريبي، او اي اتجاه اخر من الاتجاهات التي تعتمد في تفسير المعرفة البشرية غير قادر على الجزم بنفي التلازم بين العلة والمعلول، اذ لا تستطيع ادوات التجربة الحسية ان تنفي، او تثبت امرا غير حسي، واللزوم والضرورة مفاهيم عقلية.

وعلى هذا الاساس سوف تبقى العلية بوصفها علاقة لزوم وضرورة امرا محتملا في اسوء الاحوال.

الشكل الثاني للمرحلة الاستنباطية:

كان لدينا في الشكل الاول (أ) و (ب)، واتجهنا الى رفع قيمه احتمال التعميم الاستقرائي من خلال تنمية احتمال سببية (أ) لـ (ب) ونواجه في الشكل الثاني حالات من نوع آخر، حيث سوف يكون لدينا (ب) ونحاول ـ على اساس تطبيق نظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي ـ تنمية احتمال وجود (أ) او تنمية احتمال وجود احد مصاديقه، وسوف نأتي على دراسة حالات هذا الشكل فيما يلي:

الحالة الاولى:

نفترض اننا استطعنا على اساس الشكل الاول اثبات ان (ب) لها

سببان (أ ∪ ت)، فاذا لاحظنا وقوع (ب) مرة واحدة فسوف يتكون لدينا علم اجمالي بوجود احد سببي (ب)، ووفق هذا العلم (العلم١) سوف يكون احتمال وجود (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، واحتمال وجود (ت) = $\frac{١}{٢}$

ولكن اذا استطعنا أن نعرف ان (ت) حادثة مركبة من الحوادث التالية (ع ∩ غ ∩ ش)، وكان احتمال حدوث اي واحدة من هذه الوقائع الثلاث يساوي ($\frac{١}{٢}$)، حينئذ سنحصل على علم اجمالي جديد (علم ٢) يتألف من الاطراف التالية:

١ـ ان تحدث (ع) فقط.

٢ـ ان تحدث (غ) فقط.

٣ـ ان تحدث (ش) فقط.

٤ـ ان تحدث (ع ∩ غ) فقط.

٥ـ ان تحدث (ع ∩ ش) فقط.

٦ـ ان تحدث (غ ∩ ش) فقط.

٧ـ ان تحدث (ع ∩ غ ∩ ش).

٨ـ ان لايحدث اي منها.

ونلاحظ ان الطرف (١)، (٢)، (٣)، (٤)، (٥)، (٦)، (٨)، تعني انتفاء وجود (ت)، وتثبت وجود (أ) اما الطرف (٧) فهو حيادي ازاء وجود (أ) وعدم وجوده، وهذا يعني ان نصف القيمة الاحتمالية لهذا الطرف تسجل لصالح وجود (أ) ايضا، وبهذا يكون (ح) وجود (أ) في ضوء (العلم٢)

$$= \frac{٧ \frac{١}{٢}}{٨} = \frac{١٥}{١٦}$$

ولكن لدينا (العلم ١) الذي حدد قيمة وجود (أ) بـ $\frac{1}{2}$ ووفقا لنظرية الاحتمال لا بد من تطبيق قاعدة الضرب بين العلوم الاجمالية اذا لم تصدق بديهية الحكومة.

وهنا نلاحظ: ان الاطراف السبعة من (العلم ٢) التي تثبت وجود (أ) لا تنفي كون (ت) طرفا من اطراف (العلم ١)، وبهذا لا تحكم القيم الاحتمالية لـ (العلم ٢) على القيم الاحتمالية لـ (العلم ١)، وعلى هذا الاساس لا بد من الضرب بين (العلم ١) و (العلم ٢)، وسوف نحصل على الاطراف التالية:

١ـ ان توجد (أ)، و (ع).

٢ـ ان توجد (أ)، و (غ).

٣ـ ان توجد (أ)، و (ش).

٤ـ ان توجد (أ)، و (ع ∩ غ).

٥ـ ان توجد (أ)، و (ع ∩ ش).

٦ـ ان توجد (أ)، و (غ ∩ ش).

٧ـ ان توجد (أ)، و (ع ∩ غ ∩ ش).

٨ـ ان توجد (أ)، و لا توجد اي منها.

ان يوجد(ت)، و (ع) .... وهذه حادثة غير محتملة.

ان يوجد (ت)، و (غ) .... وهذه حادثة غير محتملة.

ان يوجد (ت)، و (ش) .... وهذه حادثة غير محتملة.

ان يوجد (ت)، و (ش ∩ ع) .... وهذه حادثة غير محتملة.

ان يوجد (ت)، و (ع ∩ غ) .... وهذه حادثة غير محتملة.

ان يوجد (ت)، و (ش ∩ غ) .... وهذه حادثة غير محتملة.

٩ـ ان يوجد (ت)، و (ع $\cap$ غ $\cap$ ش).

ان يوجد (ت)، ولا يوجد اي منها .... وهذه حادثة غير محتملة.

وبهذا يثبت ان (العلم ٣) يتألف من تسعة اطراف، وسوف تكون قيمة احتمال وجود (أ) على اساس الضرب = $\frac{٨}{٩}$.

الحالة الثانية:

نفترض العلم المسبق بوجود علاقة سببية بين (أ) و(ب)، ونحتمل ايضا وجود علاقة سببية بين (ت) و (ب).

فاذا وقعت (ب) فسوف يكون لدينا علم اجمالي بوقوع حادثة بينها وبين (ب) علاقة السببية، ونفترض ايضا ان كلا من (أ) و (ت) و (ب) مركب من ثلاث حوادث.

واذا رمزنا الى الحوادث الثلاثة، التي يتألف منها (أ) بـ (جـ، د، هـ)، ورمزنا الى الحوادث الثلاثة التي يتألف منها (ت) بـ (جَـ دَ، هَـ)، ورمزنا الى الحوادث الثلاثة، التي يتألف منها (ب) بـ (س ، ص، ق)، وكنا نعلم بوجود علاقة سببية بن (جـ) و (س) وبين (د) و (ص)، وبين (هـ) و (ق)، ونحتمل في نفس الوقت بوجود علاقة سببية بين (جَـ) و (س)، و (دَ) و (ص)، و (هَـ)، (ق).

فاذا وقعت (ب) فسوف يبقى (العلم ١) قائما، وهو اننا نعلم بوقوع حادثة بينها وبين (ب) علاقة سببية، ولكن هناك علما اجماليا آخر (العلم٢).

وهو العلم الاجمالي الذي يحدد قيمة احتمال سببية (ت) لـ (ب)، وسببية (ت) لـ (ب) تعبر عن سببية ثلاث حوادث «سببية (جَـ) لـ (س)

وسببية (دَ) لـ (ص) و سببية (هَـ) لـ (ق) » وسوف يتألف (العلم ٣) من مجموعة اطراف، هي حاصل ضرب اطراف العلم الاجمالي الذي يرتبط باحتمال سببية (جـ) لـ (س)، في العلم الاجمالي الذي يرتبط بسببية (د) لـ (ص)، في العلم الذي يتعلق بسببية (هَـ) لـ (ق)، وحيث اننا نفترض ان احتمال السببية في كل هذه الحالات مساوٍ لاحتمال عدمها، فسوف تكون الاطراف في (العلم ٣) ثمانية وهي:

١ـ سببية (جَـ) لـ (س) فقط.
٢ـ سببية (دَ) لـ (ص) فقط.
٣ـ سببية (هَـ) لـ (ق) فقط.
٤ـ سببية (جَـ) لـ (س) ∩ (دَ) (ص) فقط.
٥ـ سببية (جَـ) لـ (س) ∩ (هَـ) لـ (ق) فقط.
٦ـ سببية (جَـ) لـ (س) ∩ (هَـ) لـ (ق) فقط.
٧ـ سببية (جَـ) لـ (س) ∩ (دَ) لـ (ص) ∩ (هَـ) لـ (ق).
٨ـ عدم سببية اي منهم.

ونلاحظ هنا ان الطرف (١) و (٢) و (٣) و (٤) و (٥) و (٦) و (٨) يستلزم وجود (أ) بينما يمثل الطرف (٧) قيمة حيادية ازاء وجود (أ) وعدمه، وبهذا تصبح قيمة احتمال وجود (أ) = $\frac{٧ \frac{١}{٢}}{٨}$ ، وهذا (العلم ٢) حاكم على (العلم ١)؛ لان اطراف العلم الاول مقيدة بصفة، وهي ان تكون الحادثة سببا لـ (ب)، فنحن بوقوع (ب) سوف نعلم اجمالاً بوقوع حادثة متصفة بانها سبب لـ (ب)، والاطراف التي تنفي سببية (ت) تنفي مصداقيتها للعلم

الاجمالي الاول، وبهذا يكون (العلم ٢) حاكما على العلم الاول.

اما قيمة احتمال وجود (ت) فهي تحدد على اساس مدى توفر (ت) على الصفة التي يتقيد بها طرف العلم الاجمالي الاول، وسوف يكون:

ح (ت) = احتمال سببية (ت) لـ (ب) × احتمال وجوده على تقدير سببيته.

احتمال سببيته = $\frac{1}{8}$.

احتمال وجوده على تقدير سببيته = $1/2$.

اذن! ح (ت) = $\frac{1}{8} \times 1/2 = \frac{1}{16}$.

الحالة الثالثة:

نفترض ان لدينا مكتبة تضم بين كتبها (ن) من الكتب الخاصة بعلم الطب، وعلمنا بدخول شخص الى المكتبة نرمز اليه بـ (ت) مردد بين (ط) U (هـ)، فسوف يكون لدينا علم اجمالي بدخول (ط) U (هـ)، وسيكون ح (ط) = $1/2$.

وبعد ملاحظة (ن) وجدناها على طاولة المطالعة، واذا افترضنا ان وجـود كتب علم الطب على طاولة المطالعة يعني ان الداخل الى المكتبة مختص في علم الطب، وافترضنا ان الاختصاص في علم الطب حادثة مركبة من الحوادث (جـ، ح، خ) وكنا نعلم ان (ط) متصفة بـ (جـ، ح، خ) اي ان الشخص (ط) مختص بعلم الطب، ولا نعلم شيئا عن اختصاص (هـ)، فما هي قيمة احتمال دخول (ط) الى المكتبة؟

نلاحظ ان لدينا في البداية علما اجماليا يحدد قيمة ح (ط) بـ ($\frac{1}{2}$)، وبعد مشاهدة كتب الطب على الطاولة يتكون لدينا علم اجمالي مؤلف من الاطراف التالية:

١ـ اتصاف (هـ) بـ (جـ) فقط.
٢ـ اتصاف (هـ) بـ (ح) فقط.
٣ـ اتصاف (هـ) بـ (خ) فقط.
٤ـ اتصاف (هـ) بـ (جـ) ∩ (ح) فقط.
٥ـ اتصاف (هـ) بـ (جـ) ∩ (خ) فقط.
٦ـ اتصاف (هـ) بـ (ح) ∩ (خ) فقط.
٧ـ اتصاف (هـ) بـ (ح) ∩ (جـ) ∩ (خ) .
٨ـ عدم اتصاف (هـ) باي منها.

وهذا (العلم ٢) يفترض ان احتمال اتصاف (هـ) بأيٍّ من الصفات الثلاثة يساوي احتمال عدم الاتصاف، وعلى اساس (العلم ٢) تكون قيمة احتمال دخول (ط) مساوية لـ $\frac{15}{16}$ لان سبعة اطراف من اطراف هذا العلم تستلزم دخول (ط) وطرفا واحدا منها محايد.

و (العلم ٢) حاكم على (العلم ١) لان القيم الاحتمالية التي تنفي اتصاف (هـ) بـ (ح ∩ جـ ∩ خ) تنفي ان يكون (هـ) مصداقاً لـ (ت)، اي تنفي ان يكون (هـ) هو الداخل للمكتبة، ومن ثم تنفي طرفيته للعلم الاجمالي الاول.

ملاحظتان حول الشكل الثاني:

اولا ـ ان البداية التي يعتمدها هذا الشكل هي نفس البداية التي افترضها التطبيق الاول في الشكل الاول، اي افتراض استحالة الصدفة المطلقة.

وثانيا ـ ان الحالات او امثلة الحالات التي تقدمت لا تنحصر بما ذكرناه، بل هناك امثله او حالات اخرى تختلف عن الامثلة التي ذكرناها، لكنها تشترك بنفس الاطار العام الذي يتم في ضوءه حساب قيمة احتمال الحادثة في الحالات التي ذكرناها.

* * *

نهاية المطاف:

قبل تلخيص النتائج التي يمكن استخلاصها في ضوء دراستنا لتطبيق نظرية الاحتمال على الدليل الاستقرائي لا بد لنا من الوقوف عند قضية اساسية ترتبط بعامة البحث، وهي:

ان التعميم الاستقرائي ـ وفق الطريقة التي تبناها السيد الصدر ـ يتطلب امرين اساسيين:

أـ ان ينصب الاستقراء على مفردات ذات خاصية مشتركة اي اننا حينما نريد استخلاص التعميم الاستقرائي (كل أ ب) على اساس رفع قيمة احتمال سببية (أ) لـ (ب) فعلينا ان نستقرأ (أ١) و (أ ٢) .... (أ ن) ونلاحظ اقترانها بـ (ب) ولا بد ان يكون كل واحد من (أ) مشتركا مع سائر افراد (أ) بصفة جوهرية، بحيث تكون كل هذه المصاديق معبرة عن مفهوم مشترك هو مفهوم (أ) لاننا نريد رفع قيمة احتمال سببية مفهوم (أ) فاذا كانت الالفات مجموعة مختارة بشكل مصطنع، ولم تكن مشتركة في ماهية واحدة فلا يمكننا من اقتران (أ ١) (أ ٢) ان تستدل على سببية (أ).

ب ـ ان لا تتوفر الجزئيات التي شملتها التجربة على خاصية جوهرية تميزها عن سائر الجزئيات الاخرى، اي ان مصاديق (أ) التي شملتها التجربة لا تتميز بخصوصية ذاتية عن مصاديق (أ) التي لم تشملها التجربة، اذ لو تميزت فسوف يتعذر ان نسجل القيمة الاحتمالية للسببية لصالح الخصوصية المشتركة، حيث يصبح ممكنا ان تكون سببية افراد (أ) التي شملتها ناشئة من الخصوصية المميزة لهذه الالفات.

واخيرا يمكن ان نضع نتائج دراسة تطبيق نظرية الاحتمال على الدليل الاستقرائي في النقاط التالية:

اولا ـ ان الدليل الاستقرائي قادر على رفع قيمة احتمال التعميم الاستقرائي اعتمادا على نظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي.

ولا يتطلب اي مصادرة اخرى مضافا الى ما تستدعيه نظرية الاحتمال من بديهيات.

ثانيا ـ ان اتخاذ الايمان المسبق برفض مبدأ العلية مصادرة يعطل الدليل الاستقرائي عن ممارسة دوره في رفع قيمة احتمال التعميم الاستقرائي، والشك والحياد ازاء قبول العلية اورفضها هو الموقف التجريبي المعقول من مبدا العلية.

ثالثا ـ على افتراض الشك بمبدأ العلية يمكن للدليل الاستقرائي ان يرفع قيمة احتمال التعميم الاستقرائي، حيث اتضح لنا ان نظرية الاحتمال في تفسيره الاجمالي تتيح لنا فرصة رفع قيمة احتمال استحالة الصدفة المطلقة الى درجة كبيرة جدا، كما يمكن رفع قيمة احتمال التعميم الاستقرائي مع الشك بالقضية الثانية لمبدأ العلية، التي تقرر: ان العلاقة بين (أ) و (ب) علاقة الضرورة واللزوم رغم الايمان المسبق بامكان الصدفة المطلقة، ورفض القضية الاولى التي يقررها مبدأ العلية: (ان لكل حادثة سببا).

* * *

الفهرس

الموضوع	.الصفحة